課題 2 解答例

[課題 2-1] 以下の各命題論理式文について，恒真（妥当と同意），恒偽（充足不能と同意），または，充足可能のいずれが成り立つかを決定せよ．証明には真理値表を用いてもよいし，または，論理式の同値関係 (講義ノートの「命題論理の真偽」のページ参照) を用いてもよい．解答にはそれらを明記すること．

1. $p \to (q \to p)$
2. $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
3. $(p \equiv q) \to (\neg p \equiv \neg q)$
4. $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$
5. $((p \to q) \wedge p) \to q$

解答例

1. $p \to (q \to p)$
$= \neg p \vee (\neg q \vee p)$
$= \neg p \vee p \vee \neg q)$
$= \mathbf{T} \vee \neg q$
$= \mathbf{T}$

よって恒真（もちろん，充足可能でもある）．

2. $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
$= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

以下が真理値表.

p	q	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
T	**T**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**T**	**T**

よって充足可能.

3. $(p \equiv q) \to (\neg p \equiv \neg q)$

以下が真理値表.

p	q	$p \equiv q$	$\neg p \equiv \neg q$	$(p \equiv q) \to (\neg p \equiv \neg q)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

よって恒真.

4. $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$
$= (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
$= (p \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \vee (q \wedge (\neg p \wedge \neg q))$
$= \mathbf{F} \vee \mathbf{F}$
$= \mathbf{F}$

よって恒偽.

5. $((p \to q) \wedge p) \to q$
$= ((\neg p \vee q) \wedge p) \to q$
$= ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \to q$
$= (\mathbf{F} \vee (q \wedge p)) \to q$
$= (p \wedge q) \to q$
$= \neg(p \wedge q) \vee q$
$= (\neg p \vee \neg q) \vee q$
$= \neg p \vee \mathbf{T}$
$= \mathbf{T}$

よって恒真.

[課題 2-2]

以下の各論理式について，H は G_1, G_2 の論理的帰結かどうかを定めなさい．また，その理由を述べなさい.

$G_1 = p \to q$, $G_2 = q \to r$, $H = p \to r$

解答例

定理 1 を用いれば $(G_1 \wedge G_2) \to H = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ が恒真であることが示せれば，H は G_1, G_2 の論理的帰結となる．論理式の同値関係を用いて $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ 変形すると以下のようになる.

$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
$= ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \to (\neg p \vee r)$
$= \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r)$
$= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)$
$= (p \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r)$
$= (\mathbf{T} \vee (q \wedge \neg r) \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p \vee r)$
$= \mathbf{T} \wedge (\mathbf{T} \wedge \mathbf{T})$
$= \mathbf{T}$

以上により $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$ は恒真であることが示された．よって定理 1 により，H は G_1, G_2 の論理的帰結である．

(注意: 定理 2 を用いて証明することもできる．この場合は，$(G_1 \land G_2) \land \neg H$ が恒偽であることを，上の場合と同様に論理式の同値関係による変換で示してやればよい．また，$(G_1 \land G_2) \to H$ の恒真性を真理値表を用いて証明する方法でもよい．)

[課題 2-3]

以下の命題論理式を連言標準形に変換しなさい．

- $(p \to q) \to (q \to r)$
- $p \to (q \to p)$

(解答例)

$$
\begin{aligned}
&(p \to q) \to (q \to r)\\
&\quad = \neg(\neg p \lor q) \lor (\neg q \lor r)\\
&\quad = (p \land \neg q) \lor \neg q \lor r\\
&\quad = (p \lor \neg q \lor r) \land (\neg q \lor \neg q \lor r)\\
&\quad = (p \lor \neg q \lor r) \land (\neg q \lor r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p \to (q \to p)\\
&\quad = \neg p \lor (\neg q \lor p)\\
&\quad = \neg p \lor \neg q \lor p\\
&\quad = \mathbf{T} \lor \neg q\\
&\quad = \mathbf{T}
\end{aligned}
$$