課題と解答

[課題 4-1]

以下の論理式に自由変数はあるか?あれば，それを列挙せよ．

1. $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)Q(y) \rightarrow P(x)$
2. $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y) \rightarrow P(x))$
3. $(\forall x)(\exists y)(Q(f(x), y) \rightarrow (\exists z)R(y, z, w))$

(解答)

1 番目の論理式では含意演算子の右側にある $P(x)$ に現れる論理変数 x が自由変数.
2 番目の論理式に自由変数はない.
3 番目の論理式では w が自由変数.

[課題 4-2]

以下の論理式を冠頭連言標準形に変換せよ．

- $(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\exists y)Q(y, z)$
- $(\forall x)((\exists y)R(x, y) \wedge (\forall y)\neg S(x, y) \rightarrow \neg((\exists y)R(x, y) \wedge P))$
- $\neg((\forall x)(\exists y)P(u, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, v) \rightarrow R(x)))$

(解答)

以下では標準系変換アルゴリズム II におけるステップ 4（必要であれば束縛変数のつけかえを行う）に良く注意すること．例えば論理変数 y が，この規則により変数のつけかえが必要な場合，y_1 などに変えてある．

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)P(x, y) \rightarrow (\exists y)Q(y, z)\\
&\quad = \neg(\forall x)P(x, y) \vee (\exists y)Q(y, z)\\
&\quad = (\exists x)\neg P(x, y) \vee (\exists y)Q(y, z)\\
&\quad = (\exists x)\neg P(x, y_1) \vee (\exists y)Q(y, z)\\
&\quad = (\exists x)(\exists y)(\neg P(x, y_1) \vee Q(y, z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)((\exists y)R(x, y) \wedge (\forall y)\neg S(x, y) \rightarrow \neg((\exists y)R(x, y) \wedge P))\\
&\quad = (\forall x)(\neg((\exists y)R(x, y) \wedge (\forall y)\neg S(x, y)) \vee \neg((\exists y)R(x, y) \wedge P))\\
&\quad = (\forall x)((\forall y)\neg R(x, y) \vee (\exists y)S(x, y) \vee (\forall y)\neg R(x, y) \vee \neg P)\\
&\quad = (\forall x)((\forall y_2)\neg R(x, y_2) \vee (\exists y_1)S(x, y_1) \vee (\forall y)\neg R(x, y) \vee \neg P)\\
&\quad = (\forall x)(\forall y_2)(\exists y_1)(\forall y)(\neg R(x, y_2) \vee S(x, y_1) \vee \neg R(x, y) \vee \neg P)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\neg((\forall x)(\exists y)P(u,x,y) \to (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,v) \to R(x))) \\
&\quad = \neg(\neg((\forall x)(\exists y)P(u,x,y)) \vee (\exists x)((\forall y)Q(y,v) \vee R(x))) \\
&\quad = (\forall x)(\exists y)P(u,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,v) \wedge \neg R(x)) \\
&\quad = (\forall x)(\exists y_1)(\exists y)(P(u,x,y_1) \wedge \neg Q(y,v) \wedge \neg R(x))
\end{aligned}
$$

（注：最後の計算ステップでは $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x) = (\forall x)(F(x) \wedge G(x)$ と $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) = (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge G(y)$ という規則を使っている.）