課題と解答

[課題 8]

[課題 8-1] 以下の式がすべて同値であることを証明せよ.

(1) $\mathbf{P}(A, B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)\mathbf{P}(B \mid C)$
(2) $\mathbf{P}(A \mid B, C) = \mathbf{P}(A \mid C)$
(3) $\mathbf{P}(B \mid A, C) = \mathbf{P}(B \mid C)$

(命題 (1) と命題 (2) が同値であることの証明)

[命題 (2) が命題 (1) の十分条件であることの証明]

条件付き確率の定義と積事象の確率の公式から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A, B \mid C) &= \frac{\mathbf{P}(A, B, C)}{\mathbf{P}(C)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A \mid B, C)\mathbf{P}(B, C)}{\mathbf{P}(C)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(A \mid B, C)\mathbf{P}(B \mid C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(C)} \\ &= \mathbf{P}(A \mid B, C)\mathbf{P}(B \mid C)\end{aligned}$$

よって命題 (2) を仮定すると $\mathbf{P}(A, B \mid C) \quad = \mathbf{P}(A \mid C)\mathbf{P}(B \mid C)$ となり命題 (1) を得る.

[命題 (2) が命題 (1) の必要条件であることの証明]

また上の計算より $\mathbf{P}(A, B \mid C) \quad = \mathbf{P}(A \mid B, C)\mathbf{P}(B \mid C)$ であるから，命題 (1) を仮定すると $\mathbf{P}(A \mid B, C)\mathbf{P}(B \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)\mathbf{P}(B \mid C)$ となり，この等式の両辺を $\mathbf{P}(B \mid C)$ で割ることにより命題 (2) を得る.

以上より命題 (1) と命題 (2) は同値（命題 (2) は命題 (1) の必要十分条件）である.

(命題 (1) と命題 (3) が同値であることの証明)

[命題 (3) が命題 (1) の十分条件であることの証明]

条件付き確率の定義と積事象の確率の公式から以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A, B \mid C) &= \frac{\mathbf{P}(A, B, C)}{\mathbf{P}(C)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A, C)}{\mathbf{P}(C)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A \mid C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(C)} \\
&= \mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A \mid C)
\end{aligned}
$$

よって命題 (3) を仮定すると $\mathbf{P}(A, B \mid C) \quad = \mathbf{P}(B \mid C)\mathbf{P}(A \mid C)$ となり命題 (1) を得る.

[命題 (3) が命題 (1) の必要条件であることの証明]

また上の計算より $\mathbf{P}(A, B \mid C) \quad = \mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A \mid C)$ であるから，命題 (1) を仮定すると $\mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A \mid C) = \mathbf{P}(A \mid C)\mathbf{P}(B \mid C)$ となり，この等式の両辺を $\mathbf{P}(A \mid C)$ で割ることにより命題 (3) を得る.

以上より命題 (1) と命題 (3) は同値（命題 (3) は命題 (1) の必要十分条件）である．これらのことから命題 (1)，(2)，(3) は互いに同値であることが示された.

（注：解答は上記で良いが，命題 (1) と (2) の同値関係と命題 (2) と (3) の同値関係を示しても良い．以下は，命題 (2) と (3) が同値であることの証明）

[命題 (3) が命題 (2) の必要条件であることの証明]

条件付き確率の定義より以下が成り立つ.

$$\mathbf{P}(A \mid B, C) = \frac{\mathbf{P}(A, B, C)}{\mathbf{P}(B, C)} \cdots \text{(i)}$$

命題 (2) を仮定し，(i) 式と比較して，さらに条件付き確率の定義を考慮すると以下の等式を得る.

$$\frac{\mathbf{P}(A, B, C)}{\mathbf{P}(B, C)} \quad = \mathbf{P}(A \mid C) = \frac{\mathbf{P}(A, C)}{\mathbf{P}(C)}$$

すなわち以下が成り立つ.

$$\mathbf{P}(A, B, C) \quad = \frac{\mathbf{P}(A, C)\mathbf{P}(B, C)}{\mathbf{P}(C)} \cdots \text{(ii)}$$

一方，積事象の確率の公式から以下が成り立つ.

$$\mathbf{P}(A, B, C) = \mathbf{P}(B, A, C) = \mathbf{P}(B \mid A, C)\mathbf{P}(A, C) \cdots \text{(iii)}$$

(ii) 式と (iii) 式から以下のように命題 (3) を得る.

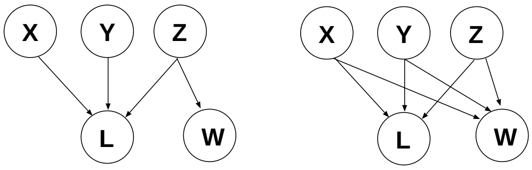
$$\mathbf{P}(B \mid A, C) = \frac{\mathbf{P}(B, C)}{\mathbf{P}(C)} = \mathbf{P}(B \mid C)$$

命題 (3) が命題 (2) の十分条件であることも同様に証明すればよい.

[課題 8-2] n 個の論理変数に対する結合確率分布表を作成するためには，いくつのエントリーが必要かを答えよ.

$2^n - 1$

[課題 8-3] 以下の各ベイジアンネットワーク (BNet A および BNet B) を定義するための条件付き確率表 (CPT) のエントリー数はそれぞれいくつになるかを答えよ.



BNet A　　BNet B

BNet A: $10 (= 2^3 + 2)$

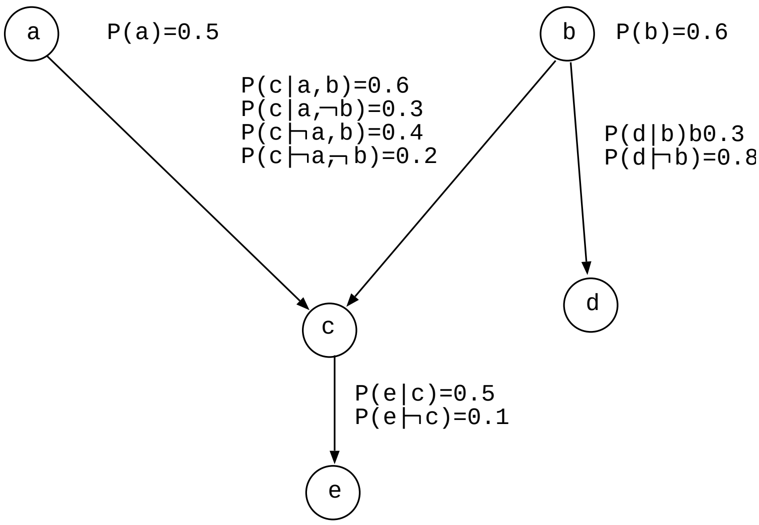
BNet B: $16 (= 2^3 + 2^3)$

[課題 8-4] n 個の論理変数に対するベイジアンネットワークを考える．ここで，どのノードも高々 k 個の親ノードを持っていると仮定する．このベイジアンネットワークを定義するための条件付き確率表 (CPT) のエントリーの総数はいくつになるかを答えよ.

$n2^k$

[課題 8-5]

下図のベイズネットワークについて，$\mathbf{P}(\neg c), \mathbf{P}(b \mid \neg d), \mathbf{P}(d \mid b, c, e), \mathbf{P}(a, b, c, d, e), \mathbf{P}(d \mid a, \neg b, \neg c)$ の値をそれぞれ求めよ.



$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\neg c) = {} & \mathbf{P}(\neg c \mid a, b)\mathbf{P}(a)\mathbf{P}(b) + \mathbf{P}(\neg c \mid a, \neg b)\mathbf{P}(a)\mathbf{P}(\neg b) + \\
& \mathbf{P}(\neg c \mid \neg a, b)\mathbf{P}(\neg a)\mathbf{P}(b) + \mathbf{P}(\neg c \mid \neg a, \neg b)\mathbf{P}(\neg a)\mathbf{P}(\neg b) \\
= {} & 0.6
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{P}(b \mid \neg d) = \frac{\mathbf{P}(\neg d \mid b)\mathbf{P}(b)}{\mathbf{P}(\neg d)} = 0.84 \text{ } (\mathbf{P}(\neg d) \text{ の計算は以下})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\neg d) &= \mathbf{P}(\neg d \mid b)\mathbf{P}(b) + \mathbf{P}(\neg d \mid \neg b)\mathbf{P}(\neg b) \\
&= 0.5
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(d \mid b, c, e) = \mathbf{P}(d \mid b) = 0.3$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(a, b, c, d, e) &= \mathbf{P}(e \mid a, b, c, d)\mathbf{P}(a, b, c, d) \\
&= \mathbf{P}(e \mid c)\mathbf{P}(c \mid a, b, d)\mathbf{P}(a, b, d) \\
&= \mathbf{P}(e \mid c)\mathbf{P}(c \mid a, b)\mathbf{P}(d \mid a, b)\mathbf{P}(a, b) \\
&= \mathbf{P}(e \mid c)\mathbf{P}(c \mid a, b)\mathbf{P}(d \mid b)\mathbf{P}(a)\mathbf{P}(b) \\
&= 0.027
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(d \mid a, \neg b, \neg c) = \mathbf{P}(d \mid \neg b) = 0.8$$