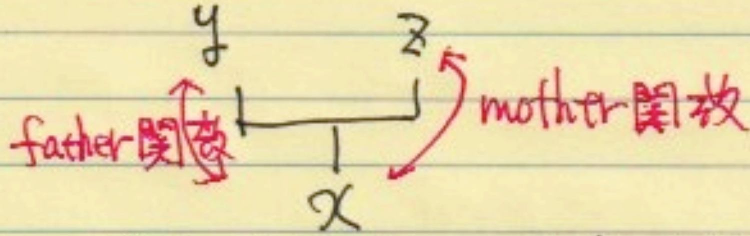
AI2 6th week 2023f

◎ スコーレム標準形

論理式F : $\forall x \exists y \exists z \, Parents(y, z, x)$

Parents(y, z, x)の定義

どんな人xにも、ある人yとある人zがいて、
yとzはxの親である。



$$father(x) = y \; . \; mother(x) = z$$

この関数を使えば論理式Fは
以下のように変換できる。

$$\forall x \exists y \exists z \, Parents(y, z, x) \xrightarrow{\text{スコーレム化}} \forall x \, Parents(father(x), mother(x), x)$$

存在記号

スコーレム関数

◎ スコーレム化の事例

例1) $\forall x \exists y\, P(x,y) = \forall x\, P(x, f(x))$

例2) $\forall x \exists y \forall z \exists w\, P(x,y,z,w)$

wはxとzにより定まる。

$= \forall x \forall z\, P(x, f(x), z, g(x,z))$

例3) $\exists x \forall y\, P(x,y) = \forall y\, P(a, y)$

定数

例4) $\exists x \forall y \exists z\, P(x,y,z) = \forall y\, P(a, y, f(y))$

演習 $\forall x \forall y \exists z\, (P(x,y) \rightarrow Q(z))$

$= \forall x \forall y \exists z\, (\neg P(x,y) \vee Q(z))$

$= \forall x \forall x\, (\neg P(x,y) \vee Q(f(x,y)))$

(例) $\forall x \exists y \exists z((\neg P(x,y) \land Q(x,z)) \lor R(x,y,z))$

$\downarrow$ 冠頭連言標準形

$= \forall x \exists y \exists z(\underbrace{(\neg P(x,y) \lor R(x,y,z))}_{\text{節}} \land \underbrace{(Q(x,z) \lor R(x,y,z))}_{\text{節}})$

$\downarrow$ スコーレム化

$= \forall x(\underbrace{(\neg P(x,f(x)) \lor R(x,f(x),g(x)))}_{\text{節}} \land \underbrace{(Q(x,g(x)) \lor R(x,f(x),g(x)))}_{\text{節}})$

$\downarrow$ 節集合

$= \{\{\neg P(x,f(x)) \underset{\lor}{,} R(x,f(x),g(x))\} \underset{\land}{,} \{Q(x,g(x)) \underset{\lor}{,} R(x,f(x),g(x))\}\}$

◎ 融合原理

命題論理

$\{\underbrace{P}_{\text{正}}, Q\}$ $\{\underbrace{\neg P}_{\text{負}}, R\}$

$\{Q, R\}$

融合節

一階述語論理

例1 $\{\underbrace{P(x)}_{\text{正}}, Q(x)\}$ $\{\underbrace{\neg P(y)}_{\text{負}}, R(z)\}$

Question: このxとyを同じ変数と見なしてよいか?

例 $\{\underbrace{P(x)}_{\text{正}}, Q(x)\}$ $\{\underbrace{\neg P(a)}_{\text{負}}, R(z)\}$

変数 定数

Question: このxにaを代入してよいか?
(substitution)

◎ 代入の定義

(例) $\theta = \{f(a)/x,\ g(b)/y\}$ ← 代入

x に $f(a)$ を代入. y に $g(b)$ を代入

項 / 変数項

- 定数項
- 関数項
- 変数項

代入に演算と考えてよい。

論理式 $E = P(x, y, f(y))$

$E\theta$ ← 論理式 E に代入 θ を適用する. そして例(instance)を求める.

$$E\theta = P(x, y, f(y))\{f(a)/x,\ g(b)/y\}$$
$$= P(f(a), g(b), f(g(b))).$$

(例) $\theta = \{f(y)/x,\ g(b)/y\}$, $E = P(x, y, f(y))$

$$E\theta = P(f(y), g(b), f(g(b)))$$

Question: この y に $g(b)$ を代入するべきか?

答え: No!

1回の代入では1つの変数に1度の代入しか適用しない。!

$$(E\theta)\theta = P(f(g(b)), g(b), f(g(b)))$$

この場合 $E\theta \neq (E\theta)\theta$

② 代入の合成演算 (○：合成演算子)

(例) $\theta = \{y/x,\ f(y)/z\},\ \lambda = \{a/x,\ b/y\}$

$$\theta \circ \lambda = \underbrace{\{y/x,\ f(y)/z\}}_{\theta} \circ \underbrace{\{a/x,\ b/y\}}_{\lambda}$$

合成演算子

$$= \{y\lambda/x,\ f(y)\lambda/z\} \circ \{a/x,\ b/y\}$$

残る　　無視

$$= \{b/x,\ f(b)/z,\ b/y\}$$

$$\lambda \circ \theta = \underbrace{\{a/x,\ b/y\}}_{\lambda} \circ \underbrace{\{y/x,\ f(y)/z\}}_{\theta}$$

$$= \{a\theta/x,\ b\theta/y,\ y/x,\ f(y)/z\}$$

$$= \{a/x,\ b/y,\ y/x,\ f(y)/z\}$$

$$= \{a/x,\ b/y,\ f(y)/z\}$$

代入合成は可換ではない！

② 単一化 (Unification)

リテラルの集合 $E = \{P(x, f(x)), P(a, y)\}$ は
単一化可能か？ つまり $P(x, f(x))$ と $P(a, y)$ を
見かけ上、同一にできる代入（単一子）は
存在するか？

同一

$$P(x, f(x))$$
$$P(a, y)$$

$\theta = \{a/x, f(a)/y\}$ (代入) を考えると

$$P(x, f(x))\theta = P(a, f(a))$$
$$P(a, y)\theta = P(a, f(a))$$

見かけ上は同一。文字づらが同じ。

→ E は単一化可能。単一子は $\theta = \{a/x, f(a)/y\}$.

Question: E を単一化する単一子は θ しか存在しない？

例えば $\theta' = \{a/x, f(a)/y, b/z\}$ を考える

θ' も E の単一子

Answer: No! 無限に存在する。

これだと処理に困る。

どうするか？

⇒ 唯一に定まる方法を考える。