

2023年 応用数学II 中間試験

クラス: 学籍番号: 氏名:

試験に関する諸注意

- 以下で A は A の転置行列, \vec{x} はベクトル, $\|\vec{x}\|$ は \vec{x} のノルム, $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は \vec{x} と \vec{y} の内積, そして, I は単位行列をあらわします.
- 正しい答えをすべて選ぶ問題は完全一致で採点します。(部分点はありせん)

注意: 三角関数の値は
おめておくこと。(←減点対象)

問 1 以下の間に答えなさい。選んだものの番号を丸で囲みなさい。(20点)

5x4

問 1.1 3つのベクトル $(x, 1, 1)$, $(1, x, 1)$, $(1, 1, x)$ が一次従属となる x の値を以下の中からすべて選びなさい。

- 1: $x = -2$ 2: $x = -1$ 3: $x = 0$ 4: $x = 1$ 5: $x = 2$

問 1.2 4つのベクトル $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 2, -1)$, $\vec{c} = (0, 4, 3)$, $\vec{d} = (3, 1, 2)$ について $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ が成り立つとき、値の組 (λ, μ, ν) を以下の中から選びなさい。

- 1: $(5/2, 1, 1/2)$ 2: $(5/3, 2/3, -1/3)$ 3: $(5/3, 2/3, 1/3)$
4: $(5/4, 1/2, 1/4)$ 5: $(5/3, -2/3, 1/3)$

問 1.3 3つのベクトル $\vec{a} = (7/11, 6/11, -6/11)$, $\vec{b} = (-6/11, 9/11, 2/11)$, $\vec{c} = (6/11, -2/11, 9/11)$ について正しいものを以下の中からすべて選びなさい。

- 1: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は空間の直交基底である。 2: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は空間の直交基底ではない。
3: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はすべて単位ベクトルである。 4: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の中に単位ベクトルでないものがある。

問 1.4 \mathbb{R}^n のベクトル \vec{x}, \vec{y} について成り立つものを以下の中からすべて選びなさい。

- 1: $\vec{x} \cdot \vec{y} \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ 2: $\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2$
3: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$ 4: $\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| < \|\vec{x} + \vec{y}\|$
5: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{2}(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$

5×4

問2 座標平面で t をパラメタとする次の連立方程式が表す直線 l について以下の問に答えなさい。
(20点)

$$\begin{cases} 2x - y - 3t = -1 \\ x + 2y + t = 2 \end{cases}$$

問2.1 直線 l をヘッセの標準形に変換しなさい。

問2.2 直線 l の法線ベクトルをすべて求めなさい。

問2.3 直線 l の原点からの距離を求めなさい。

2.1 $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 $(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}})$ 複号同順

2.3 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

問 3 座標変換に関する以下の問に答えなさい。(20点)

4×5

問 3.1 以下の A から D の各座標変換はどのような幾何学的変換であるかを答えなさい。

$$A: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B: \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad C: \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad D: \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

問 3.2 座標平面における直線 $y = \tan \frac{\pi}{8} x$ の鏡映を表す座標変換を求めなさい。

3.1 A: x 軸方向 $\wedge \frac{\pi}{4}$ と y 軸方向 $\wedge \frac{\pi}{4}$ の
スケーリングの合成

B: $y = x$ の射影

C: $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ の鏡映

D: $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ の射影

3.2
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

問4 座標平面上の3点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が直線上にあると推定して、この3点を通るもつともらしい直線 $y = ax + b$ を一般化逆行列による最小二乗法で求めることを考える。

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ として以下の間に答えよ. (20点)}$$

10x2

問4.1 X, Y, A の間に成り立つ関係を以下の中からすべて選びなさい。選んだものの番号を丸で囲みなさい。

1: $Y = {}^tXA$ 2: $Y = XA$ 3: $Y = AX$ 4: $Y = A^tX$ 5: $XY = X^tXA$

6: $Y^tX = AX^tX$ 7: ${}^tXY = {}^tXXA$ 8: $YX = A^tXX$ 9: $({}^tXX)^{-1}{}^tXY = A$

10: $(X^tX)^{-1}XY = A$ 11: $Y^tX(X^tX)^{-1} = A$ 12: $YX({}^tXX)^{-1} = A$

問4.2 $(x_1, y_1) = (2, 3), (x_2, y_2) = (4, 7), (x_3, y_3) = (9, 11)$ のとき, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{13} \\ \frac{21}{13} \end{pmatrix}$$

問5 $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で, $X = I + A$ とする. 以下の問に答えなさい. (20点) 5x2+10

問5.1 A^2 と A^3 を求めなさい.

問5.2 X^{16} を求めなさい.

$$5.1 \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = 0$$

$$\begin{aligned} 5.2 \quad X^{16} &= (I + A)^{16} \\ &= I^{16} + \binom{16}{1} I^{15} A + \binom{16}{2} I^{14} A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 32 & 528 \\ 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$