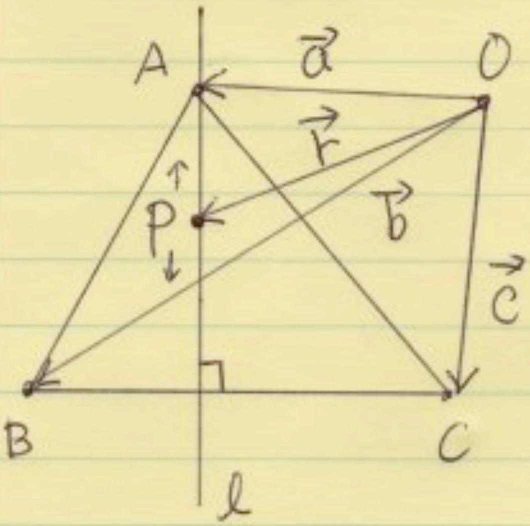
応用数学II 第1回 演習・課題

1-1

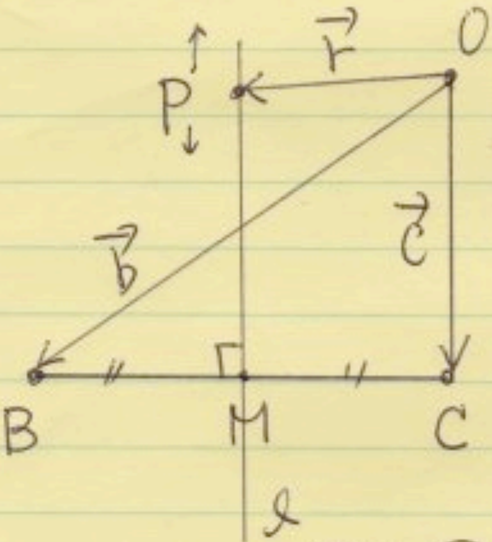


垂線l上の動点をPとすると
AP ⊥ BC

よって

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

1-2



線分BCの中点をMとし
BCの垂直2等分線l上の
動点をPとすると.

PM ⊥ BC …①

さらに $\overrightarrow{OM}=\vec{m}$ とすると

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \cdots ②$$

①と②より

$$\left(\vec{r}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

2-1. 直線 l の単位法線ベクトルを $\vec{n}=(n_x, n_y)$,
原点からの距離を p, そして l 上の動点 P の
位置ベクトルを $\vec{r}=(x, y)$ とすると.

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=p$$

となる。これを成分表示すると

$$n_x x + n_y y = p \quad (\leftarrow \text{ヘッセの標準形})$$

$\|\vec{n}\|=1$, つまり $n_x^2+n_y^2=1$ であり, $p>0$ に
注意して. $ax+by=c$ と比較すると

$$\text{単位法線ベクトルは}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\\[2ex] \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\end{cases}$$

となる。
さらに原点からの距離は $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

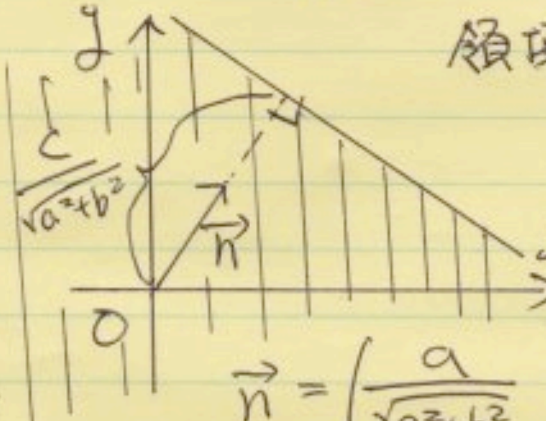
2-2 $c\geq 0$ のとき $ax+by<c$ は $\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}<\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
であることを考えると, ベクトル (x, y) とベクトル $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$
の内積が $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より小さいことを意味する。
つまり直線 l: $ax+by=c$ とすると, 求める領域は

- $c>0$ のときは直線 l より原点側 --- ①
- $c<0$ のときは直線 l からみて原点を含まない側 ②
- $c=0$ のときは点 (a, b) を含まない側 --- ③

となる。

2-2（続） 図形的解釈（ただし、以下では$a, b>0$の場合を考える。それ以外の場合は省略）

① $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y < \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

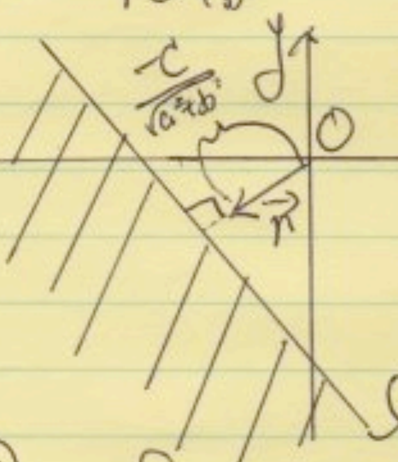


領域は斜線部（境界線ℓを含まない）

$\ell : \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\vec{n} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

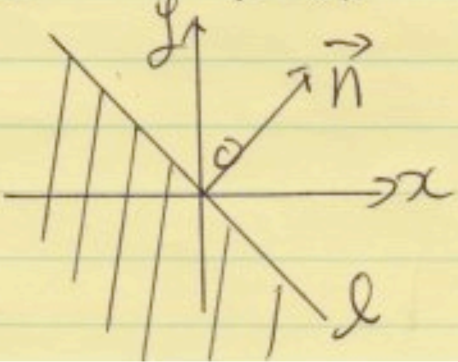
② $\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}y > \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$\vec{n} = \left(\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

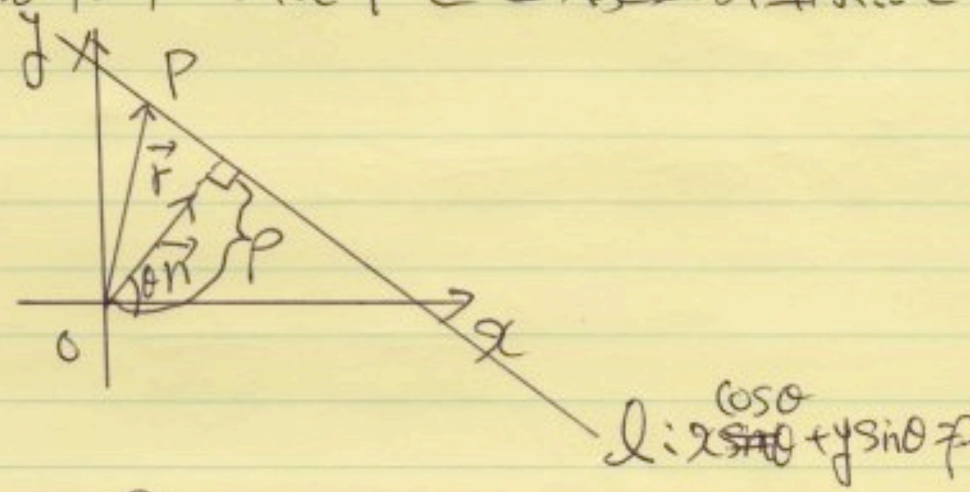
領域は斜線部（境界線ℓを含まない）

③ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x < 0$



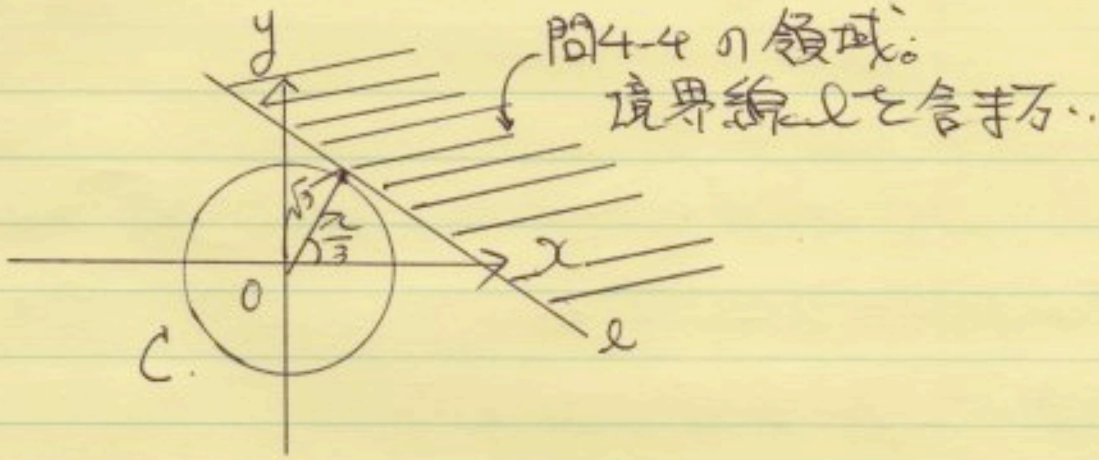
$\vec{n} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

3-1 $\vec{n}=(\cos\theta, \sin\theta)$ を定ベクトル，$\vec{r}=(x, y)$ を動ベクトルとすると $x\cos\theta+y\sin\theta=p\ (>0)$ は
$\vec{n}\cdot\vec{r}=p$ を意味する。その図形的解釈は以下となる。ただし点Pを直線上の動点としている。



3-2
$$\begin{cases} x=t+1 & \cdots① \\ y=-t+3 & \cdots② \end{cases}$$
①と②式よりパラメタ t を消去すると $x+y=4$。
これをヘッセの標準形に変換すると
$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \cdots ③$$
$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから③式は
$$x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}.$$
よって直線 l の単位法線ベクトルは $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で
(複号同順)
原点からの距離は $2\sqrt{2}$。

3-3 $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$. $\left(x\cos\frac{\pi}{4}+y\,\cancel{\cos}\,\sin\frac{\pi}{4}<2\sqrt{2}\right)$



4-1 $\sqrt{3}$

4-2 $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4-3 $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3}$ (ヘッセの標準形)

4-4 $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y > \sqrt{3}$