「応用数学Ⅱ」第2回演習・課題 解答例

問1.1

$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

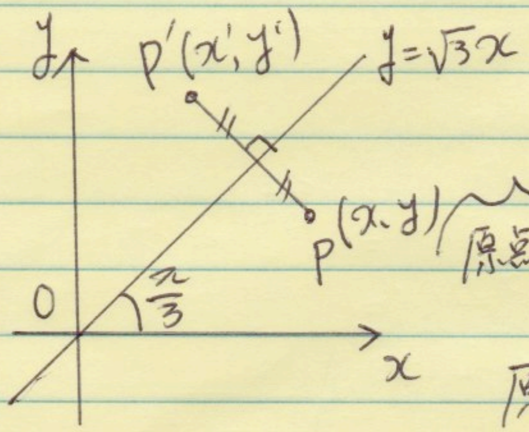
問1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

問1.3

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

問1.4



点Pの $y=\sqrt{3}x$ に対する鏡映は、点Pを原点を中心に時計回りに $\pi/3$ 回軸し、x軸に対して鏡映をとり、原点を中心に反時計回りに $\pi/3$ 回転することで得られる。

よって求める座標変換は以下の3つの座標変換の合成によって得られる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

注) これは $\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$ に等しい。

問2.1 任意のベクトル$\vec{x},\vec{y}$について
$\|A(\vec{x}+\vec{y})\|=\|\vec{x}+\vec{y}\|$であるから$\|A(\vec{x}+\vec{y})\|^2=\|\vec{x}+\vec{y}\|^2$
となる。

$$\|A(\vec{x}+\vec{y})\|^2=\|A\vec{x}+A\vec{y}\|^2$$
$$=(A\vec{x}+A\vec{y})\cdot(A\vec{x}+A\vec{y})$$
$$=\|A\vec{x}\|^2+2(A\vec{x})\cdot(A\vec{y})+\|A\vec{y}\|^2 \cdots ①$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$
$$=\|\vec{x}\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 \cdots ②$$

$\|A\vec{x}\|=\|\vec{x}\|$, $\|A\vec{y}\|=\|\vec{y}\|$であるから、①, ②式より
$$(A\vec{x})\cdot(A\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$$

問2.2 $\vec{x}={}^t(x,y)$とすると（${}^t(x,y)$は$(x,y)^T$と同じ）
$$A\vec{x}=\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y \end{pmatrix}$$
よって$\|A\vec{x}\|=\|\vec{x}\|$となるのは係数$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$が
任意の実数x, yに対して
$$(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2=x^2+y^2 \cdots ③$$
という恒等式を満すことを意味する。
③式の左辺を展開して左辺と右辺のx, yに
関する同じ次数の項の係数を比較すると
以下の条件が得られる。

$$\begin{cases} a_{11}^2+a_{21}^2=1 & (x^2\text{の比較}) \\ a_{12}^2+a_{22}^2=1 & (y^2 \quad〃) \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0 & (xy \quad〃) \end{cases}$$

問2.3 $A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & \cancel{a_{12}}\ a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} & a_{12}^2+a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\det A \neq 0$であるからA^{-1}が存在し、
~~$\det A \neq 0$のとき~~ $A^TA = I$の両辺に右からA^{-1}をかけると
$A^T = A^{-1}$が得られる。

また$\det A = \det A^T$であり、かつ$\det A^TA = \det A^T \det A$
で$\det I = 1$であるから

$$\det(A^TA) = \det I = 1$$
$$(\det A)^2 = 1$$

よって $\det A = \pm 1$.

(別解) 問2.2の結果を用いて直接計算する

$$\begin{aligned}
(\det A)^2 &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 \\
&= a_{11}^2a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{21}^2a_{12}^2 \\
&= a_{11}^2(1-a_{12}^2) - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{21}^2(1-a_{22}^2) \\
&= a_{11}^2 - a_{11}^2a_{12}^2 + 2a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2 - a_{21}^2a_{22}^2 \\
&= a_{11}^2 + a_{21}^2 + 2a_{11}^2a_{12}^2 - 2a_{11}^2a_{12}^2 \\
&= a_{11}^2 + a_{21}^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

よって $\det A = \pm 1$.

問3. $\vec{x} = (x, y)^T$ とする.

$A\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 3y\end{pmatrix}$ Aはy軸方向に3倍拡大する座標変換.(以下、略記)

$B\vec{x} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}$ y軸の鏡映.(直交変換)

$C = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ 原点を中心に反時計回りに$\pi/3$回転.(直交変換)

$D\vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\ 2x+4y\end{pmatrix}$

$x' = x+2y$, $y' = 2x+4y$ とすると $y' = 2x'$ であるから

Dは $y = 2x$ への射影.

$F = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \tan\pi/4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

よってFは x軸方向へ$\pi/4$スキュー.

$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$ y軸方向に$1/3$倍拡大.

$B^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y軸の鏡映

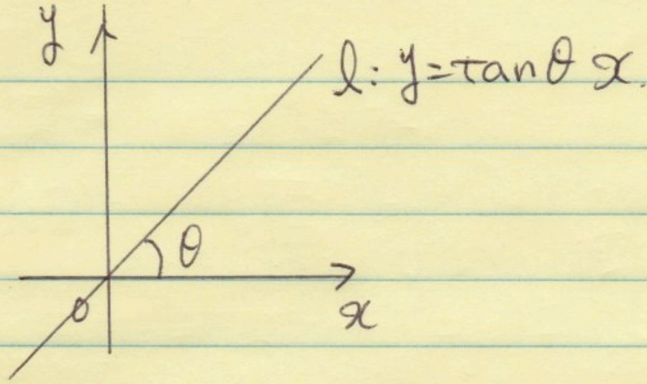
$C^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\pi/3\\ -\sin\pi/3 & \cos\pi/3\end{pmatrix}$ 原点を中心に時計回りに$\pi/3$回転

$\det D = 0$ より逆行列は存在しない.

$E^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \tan\frac{3}{4}\pi\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

x軸方向に$\frac{3}{4}\pi$スキュー.

問4.1



問4.2 講義でやった内容そのままなので説明省略

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

問4.3 これも説明省略

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \end{pmatrix} \text{もしくは} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

問5.1 $\cancel{\cos\frac{2}{3}\pi \quad \sin\frac{2}{3}\pi}$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & \sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & -\cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

問5.2

$$A^n = \begin{cases} A & (n=2k-1) \\ I & (n=2k) \end{cases} \quad k=1,2,3,\cdots$$

問5.3

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

問5.4

$$B^n = \begin{cases} B & (n=3k-2) \\ B^2 & (n=3k-1) \\ I & (n=3k) \end{cases} \quad k=1,2,3,\cdots$$

$$\text{ただし } B^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$