応用数学II 第3回演習

問1 (20点) 2×10

1 × (分配則は成り立つ)

2 × ($A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ とすると $A^2=O$)

3 ○ (転置行列の定ぎより自明)

4 ○

5 ○ (${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ であるから

$${}^tA\,{}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}A)={}^tI=I \cdots ①$$

Aが正則のとき ${}^tA$ も正則だから

①の両辺の左側から $({}^tA)^{-1}$ をかけて

$${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$$

を得る

6 ○ (交代行列の定ぎ)

7 ×

第2行−3×(第1行), 第3行−2×(第1行)を行ない, 次に第1列に −9, −2, −12 をかけてそれぞれ第2, 3, 4列に加え, 第1行の第2列以下の要素を0にする

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-25&-1&-26\\0&-19&2&-17\\0&6&1&7\end{pmatrix}$$

第4行を用い, 第2, 3行の第3列の要素を0にする。次に第4行の第2, 4列の要素を0にする。

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-19&0&-19\\0&-31&0&-31\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

第4列−第3列を行なって, 第2行に $-1/19$ を, 第3行に $-1/31$ をかける。次に第3行から第2行を引く

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

第3行と第4行を入れかえる

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ← 階数3

8. ○ (「行列と連立1次方程式」)のP.61の系4.5)

9. ○

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$
$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)$$
$$= \det(A)$$

10. ○ (上記書籍P.66のTh.4.11)

問2 (20点) (7+7+6)

A. (7) 第2行,第3行を第1行に加えて,第1行から15をくくり出し、次に第3列から第2列を引き,第2列から第1列を引き,さらに第3列から第2列を引けば3角行列となる。(定ぎに基づいて計算しても同じ)

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -2 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & -12 \end{vmatrix}$$
$$= 15(-2)(-12) = \underline{360}$$

B. (7) 第3列から第2列を引いたのちに第2列から第1列を引けば第2列と第1列が一致するので $\det B = \underline{0}$

C. (6) 第2,3,4の各行から第一行を引けば3角行列となる。

$$\det C = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = \underline{a(b-a)^3}$$

$$a(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)$$

問3 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $X^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$

(15点)

(4+5+6) (1) $X^2=0$ より

(4点) $\begin{cases} a^2+bc=0 \cdots ① & b(a+d)=0 \cdots ② \\ c(a+d)=0 \cdots ③ & bc+d^2=0 \cdots ④ \end{cases}$

①と④から $-bc=a^2=d^2 \cdots ⑤$

$\therefore d=\pm a$

(i) $d=a$ のとき $ab=0,\ ac=0 \cdots ⑦$

(イ) $a=0$ のとき ⑤から $bc=0$, ⑥から $d=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(b\neq 0)$, または $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}(c\neq 0)$ (1点)

(1点) または $A=0$ (1点)

(ロ) $a\neq 0$ のとき, ⑦から $b=c=0$

よって①から $a=0$ となり矛盾

(ii) $d=-a$ のとき, $a=0$ とすれば (i) の場合となる

$a\neq 0$ とすれば ①より $bc=-a^2\neq 0$

よって $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}(a\neq 0,\ b\neq 0)$

(1点)

問3 (2) 以下も(1)と同様に結果は次の通り

(5点) (i) $d=a$ のとき $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}$ $(b\neq 0)$ (1点)

または $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1点) または $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (1点)

(ii) $d=-a\neq 0$ のとき ($\because a=0$ なら (i) の場合になる)

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$ $(b\neq 0)$ (1点)

または $A=\begin{pmatrix} a & (1-a^2)/c \\ c & -a \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$ (1点)

(3) (i) $a+d\neq 1$ のとき $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1点) または $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1点)

(6点)

(ii) $(a+d)=1$ のとき

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ (a-a^2)/b & 1-a \end{pmatrix} \quad (b\neq 0)$$

(1点)

または $A=\begin{pmatrix} a & (a-a^2)/c \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

(1点)

または $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1点)

または $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1点)

問4
(30点)
10×30

$$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$D^3 = D^2 \cdot D = -I \cdot D = -D$$

$$D^4 = D^3 D = (-D)D = -(-I) = I$$

これ以降はこの繰り返し

よって $m \geq 1$ に対して

$$\begin{cases} D^{4m-3} = D \\ D^{4m-2} = -I \\ D^{4m-1} = -D \\ D^{4m} = I \end{cases}$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

よって $m \geq 1$ に対して

$$\begin{cases} E^{2m-1} = E \\ E^{2m} = I \end{cases}$$

階差を考える

$$F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},\ F^4 = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix},\ F^5 = \begin{pmatrix} 1 & 31 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

公比2の等比数列

よって $m \geq 1$ に対して

$$F^m = \begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

問5
(15点)

$G=\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}$ の固有多項式 $\phi_G(\lambda)$ は

$$\phi_G(\lambda)=|\lambda I-G|$$
$$=\begin{vmatrix}\lambda+2&-3\\-1&\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+2)\lambda-3=(\lambda+3)(\lambda-1)$$

よってGの固有方程式は $(\lambda+3)(\lambda-1)=0$ より

Gの固有値は $\lambda=1,-3$

(5点)

(1) 固有値1の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ただしcは $c\neq 0$ なるパラメタ)

(2) 固有値−3の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (同上)

以上より $X=\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}$ はGの相似変換行列で

$X^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}$ となり

$X^{-1}GX=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}$ となる。 (5点)

$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}$ とおくと

$$X^{-1}G^nX=\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&(-3)^n\end{pmatrix}$$

よって $G^n=X\Lambda^nX^{-1}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1-(-3)^{n+1}&3+(-3)^{n+1}\\1-(-3)^n&3+(-3)^n\end{pmatrix}$$

(5点)