第4回 演習・課題

問1.1 $y_{k+2} = 7y_{k+1} - 6y_k$

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

よって $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

また $y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_k$

よって $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}$

問1.2 Aの固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 6 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda-1)$$

Aの固有方程式は $\phi_A(\lambda) = (\lambda-6)(\lambda-1) = 0$

よってAの固有値は $\lambda = 1, 6$.

$\lambda = 1$ のとき, 固有ベクトルは $v_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ただしtは t≠0なるパラメタ)

$\lambda = 6$ 〃 $v_2 = t\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (〃)

よってAの相似行列 X は $X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で, $X^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

これより $\underbrace{(X^{-1}AX)(X^{-1}AX)\cdots(X^{-1}AX)}_{k\text{コ}} = X^{-1}A^kX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^k \end{pmatrix}$

よって $A^k = X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6^k \end{pmatrix}X^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6^{k+1}}{5} & \frac{6}{5} - \frac{6^{k+1}}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{6^k}{5} & \frac{6}{5} - \frac{6^k}{5} \end{pmatrix}$$

問1.3 $x_k = A^k x_0 = \begin{pmatrix} 4+6^{k+1} \\ 4+6^k \end{pmatrix}$

問1.4 $y_k = (0 \ \ 1) x_k = \boxed{4+6^k}$

問2.1 証明は数学的帰納法による.

(1) $m=1$のときは自明.

(2) $m=k$のとき以下が成立つと仮定する。

$$(A+I)^k = A^k + \binom{k}{1} A^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} A + I \quad \cdots ①$$

①式の両辺に$(A+I)$をかけると.

$$(A+I)^{k+1} = A^{k+1} + \left[\binom{k}{1}+1\right] A^k + \cdots + \left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right] A^{k+1-i} + \left[1+\binom{k}{k-1}\right] A + I$$

ここで
$$\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!} + \frac{k!}{(k-i+1)!\,(i-1)!}$$
$$= \frac{k!}{(k-i+1)!\,i!}(k-i+1+i)$$
$$= \binom{k+1}{i}$$

よって
$$(A+I)^{k+1} = A^{k+1} + \binom{k+1}{1} A^k + \cdots + \binom{k+1}{k} A + I$$

となり①式は$k=m+1$のときも成り立つ.

以上のことよりすべての自然数mについて与式は成り立つ。//

問2.2

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O$。よって $n \geq 3$ のとき $A^n = O$

問2.1の結果を用いて.

$$X^{15} = (A+I)^{15} = \binom{15}{13} A^2 + \binom{15}{14} A + I$$

$$= 105A^2 + 15A + I$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 15 & 120 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

問3.1 Aの固有多項式 $\phi_A(\lambda)$ は

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 3)^2$$

よってAの固有値は $\lambda = 3$.

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (tは$t \neq 0$なるパラメタ)

固有ベクトルは1つしかないので

$\boxed{\text{Aは対角化できない.}}$

問3.2 $A-3I=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$(A-3I)^2=\boxed{O}$ …①

問3.3. $A=(A-3I)+3I$ として、両辺をn乗すると、
問2で証明した二項定理より

$$A^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (A-3I)^k(3I)^{n-k} \quad \cdots ②$$

②式の右辺について、①式より $k\geqq 2$ のとき
$(A-3I)^k=O$ であるから

$$\begin{aligned}A^n &= {}_nC_0(3I)^n+{}_nC_1(A-3I)(3I)^{n-1}\\ &= 3^nI+3^{n-1}\cdot n(A-3I)\\ &= 3^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+3^{n-1}\cdot n\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\\ &= \boxed{\begin{pmatrix}(3-2n)3^{n-1} & -2n\cdot 3^{n-1}\\ 2n\cdot 3^{n-1} & (2n+3)3^{n-1}\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

問4.1 $A=\sum y_i^2$, $B=\sum x_i^2$, $C=\sum y_i$, $D=\sum x_i y_i$, $E=\sum x_i$と
おくと. $A=117/2$, $B=62$, $C=13$, $D=117/2$, $E=14$.

よって $S(a,b)=A+a^2B+nb^2-2bC-2aD+2abE$
$$\boxed{=62a^2+4b^2+28ab-26b-117a+117/2}$$

問4.2
$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a}=\boxed{124a+28b-117}$$
$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b}=\boxed{8b-26+28a}$$

問4.3
$$\begin{cases}124a+28b-117=0\\ 28a+8b-26=0\end{cases}$$
よって $\boxed{a=1,\ b=\frac{-1}{4}}$.

問4.4 $X=\begin{pmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ x_3 & 1\\ x_4 & 1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$とすると, すべての点が
直線 $y=ax+b$ 上にあると仮定すると $Y=XA$ となる。
$X^TY=X^TXA$ であるから $\det(X^TX)\neq 0$ なら $(X^TX)^{-1}X^TY=A$.
$X^TX=\begin{pmatrix}62 & 14\\ 14 & 4\end{pmatrix}$ より $(X^TX)^{-1}=\frac{1}{52}\begin{pmatrix}4 & -14\\ -14 & 62\end{pmatrix}$
$X^TY=\begin{pmatrix}117/2\\ 13\end{pmatrix}$

よって $A=(X^TX)^{-1}X^TY=\boxed{\begin{pmatrix}1\\ -1/4\end{pmatrix}}$.

~~問5-1~~ 今日からn日後の天気を確率ベクトル$\vec{p}(n)$で表わすこととする。ただし、$\vec{p}(n)=\begin{pmatrix}p_1(n)\\p_0(n)\end{pmatrix}$で

$p_1(n)$, $p_0(n)$は今からn日後にそれぞれ晴れる、もしくは雨が降る確率を意味する。
つまり $0 \leq p_1(n) \leq 1$, $0 \leq p_0(n) \leq 1$で
$p_1(n)+p_0(n)=1$である。
さらに $Q=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{01}\\q_{10} & q_{00}\end{pmatrix}$とする。（注：問題の性質より $\begin{cases}q_{11}+q_{01}=1\\q_{10}+q_{00}=1\end{cases}$）

問5.1 ~~日~~今が晴れているというのと$\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$であり
明後日の天気の確率ベクトルは$\vec{p}(2)$。
Qを用いると

$$\vec{p}(2)=Q^2\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}q_{11}^2+q_{01}q_{10}\\q_{10}q_{11}+q_{00}q_{10}\end{pmatrix}$$

よって明後日が晴れる確率は $p_1(2)=\boxed{q_{11}^2+q_{01}q_{10}}$

問5.2 $Q=\begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1-r & r\end{pmatrix}$ である。(6ページの(注)を参照)

今日が晴れ,つまり $\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ のとき,n日後の天気を表わす確率ベクトル $\vec{p}(n)$ は

$$\vec{p}(n) = Q^n \vec{p}(0)$$

で求められる。よって Q^n を求める。

Q の固有方程式 $|\lambda I - Q| = (\lambda-1)(\lambda+1-2r)=0$

であるから Q の固有値は $|\lambda I - Q|=0$ を解いて

$\lambda = 1,\ 2r-1$

$\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ただし c は $c\neq 0$ なるパラメタ)

$\lambda=2r-1$ 〃 $c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ (〃)

$X = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ を相似行列として Q を対角化すると

$$X^{-1}QX = \begin{pmatrix}1&0\\0&2r-1\end{pmatrix}$$

よって $X^{-1}Q^nX = \begin{pmatrix}1&0\\0&(2r-1)^n\end{pmatrix}$ であるが

$Q^n = X\begin{pmatrix}1&0\\0&(2r-1)^n\end{pmatrix}X^{-1}$ $\quad X^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\{1+(2r-1)^n\}/2 & \{1-(2r-1)^n\}/2 \\ \{1-(2r-1)^n\}/2 & \{1+(2r-1)^n\}/2\end{pmatrix}$$

よって $\vec{p}(n) = Q^n\vec{p}(0) = \boxed{\begin{pmatrix}\{1+(2r-1)^n\}/2 \\ \{1-(2r-1)^n\}/2\end{pmatrix}}$ 晴れの確率 雨の確率

問5.3 $\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}s\\1-s\end{pmatrix}$ $(0\le s\le 1)$ とすると

$p_1(\infty) = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}\left[\{1+(2r-1)^n\}s + \{1-(2r-1)^n\}(1-s)\right]$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$ (∵ $0<2r-1<1$ より $\lim_{n\to\infty}(2r-1)^n=0$)