第6回演習・課題

[1] 問1.1 ① $x+y+z=15,\ x,y,z \geq 1.$

$$\underbrace{\circ\circ}_{x}\vee\underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}_{y}\vee\underbrace{\circ\circ\circ}_{z}$$

15個の玉を一列に並べ、3つのグループに分けることを考える。上の例は $x=2,\ y=10,\ z=3$ を表わしている。"V"の区切りを入れる場所は14箇所あるので、求める場合の数は ${}_{14}C_2 = 91$ 通り

② $x=y$ より $2x+z=15.$
これを満たす正の整数解 (x, z) の組は以下
$(1,13),(2,11),(3,9),(4,7),(5,5),(6,3),(7,1)$
7通り

③ ①の整数解の組合せでは $x>y,\ x=y,\ x<y$ の3通りに分けられる。さらに x, y については対称式であるから $x>y$ と $x<y$ の場合の数は等しい。よって求める場合の数は①の場合の数から②のそれを引き、2で割った値となる。 $(91-7)/2 = 42$ 通り

① 問1.2　$x+y+z+w<15$,　$x, y, z, w \geq 0$

以下のようにスロットが18個ある一列の箱，14個の玉，3個の区切り印(∨)，そして1個のストップ印(×)を考える。ただしストップ印は常に3つの区切り印の右側に

$$\underbrace{\circ\,\circ\,\circ}_{x}\,\vee\,\underbrace{\vphantom{\circ}}_{y}\,\vee\,\underbrace{\circ\,\circ\,\circ\,\circ}_{z}\,\vee\,\underbrace{\circ\,\circ}_{w}\,\times\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ$$

あるとする。

上図の例は $x=3$, $y=0$, $z=4$, $w=2$ を表わしている。(ストップ印(×)で $x+y+z+w$ の値を決定している。)

よって求める場合の数は ${}_{18}C_4 = 3060$ 通り

問1.3　各位の和が9となる3桁の数を以下の方法で表現する。

$$\underbrace{\circ\,\circ\,\circ}_{100\text{の位}}\,\times\,\underbrace{\circ\,\circ\,\circ\,\circ}_{10\text{の位}}\,\times\,\underbrace{\circ\,\circ}_{1\text{の位}} \Rightarrow 342\text{を表わす}$$

よって求める場合の数は ${}_{11}C_2 = 55$

(つまり $x+y+z=9$,　$x, y, z \geq 0$
となる整数を求める問題と同じ。
解の組の場合の数)

[1] 問1.4 ① 5冊、4冊、3冊の3組に分ける場合.

$_{12}C_5 \times {}_7C_4 = 27720$ 通り

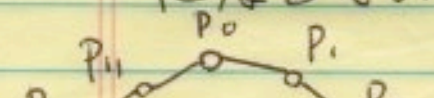
② 8冊, 2冊, 2冊の3組に分ける場合.

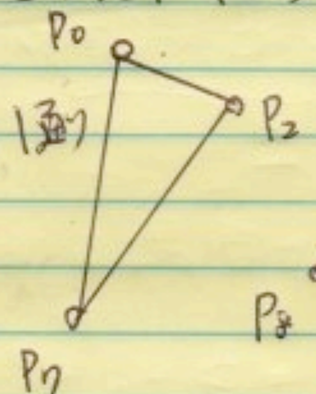
A組(8冊), B組(2冊), C組(2冊)の3組に分けてから, BとCの区別をはずせばよい。よって

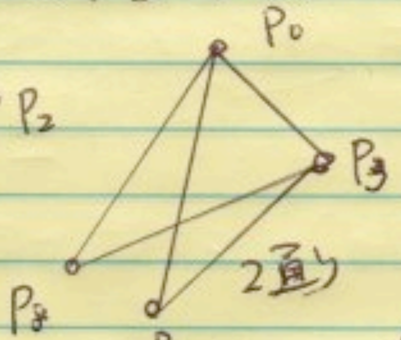
$$\frac{{}_{12}C_8 \times {}_4C_2}{2} = 1485 \text{ 通り}.$$

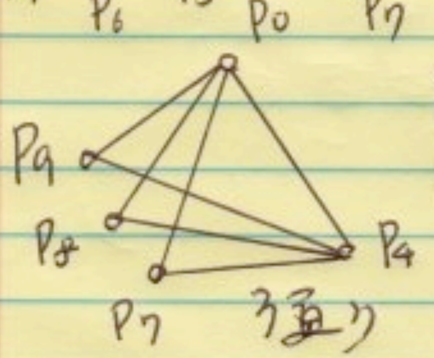
③ $_{12}C_4 \times {}_8C_4 = 34650$ 通り

問1.5 半円弧より小さい弧の上に立つ円周角は鋭角であるという性質を用いる。
正十二角形の頂点をP_0を固定し, 時計回りに順に$P_1, P_2, \cdots, P_{11}$とする。P_0を含む三角形で鋭角三角形になるものを以下に列挙する。

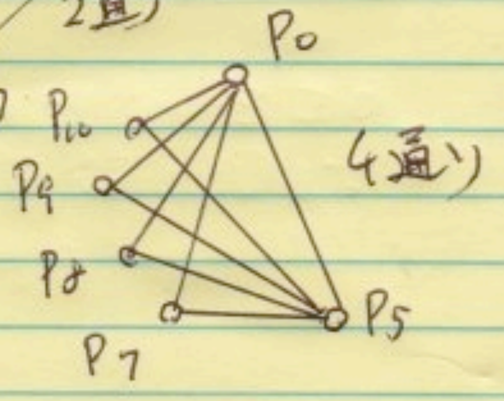








$\boxed{\text{全部で10通り。}}$



他の頂点($P_1 \sim P_{11}$)を基点とする三角形を
考えると 10×12 通りになるが、すべての頂点を
3回重複して数えているので、求める場合の数は $120/3 = 40$ 通り。

$\boxed{2}$ 問1.6 m, d, c, n を同じもの(子音)と考え
e を2個, こを2個, 子音4個を1列に並べ、
4個の子音は左から順に m, d, c, n とする。
よって求める場合の数は

$$\frac{8!}{2! \times 2! \times 4!} = 420 \text{ 通り}$$

問1.7 mathematics には a, m, t が各2個あるので
一列に並べる場合の数は $\frac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = 4{,}989{,}600$

この列を円形に並べると同じ並びが11回
現われるので、求める場合の数は

$$\frac{4989600}{11} = 453600 \text{ 通り}$$

問1.8 $(x+y+z)^6$ の展開式の各項はすべて6次の
項である。よって異なる項の数は
$a+b+c=6$, $a, b, c \geq 0$ となる
整数解の組の場合の数なので
求める数は ${}_8C_2 = 28$。

$\boxed{2}$

問2.1 $x_{n+1} = 3x_n - 1$, $x_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
x_n - \frac{1}{2} &= 3\left(x_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \\
&= 3^2\left(x_{n-2} - \frac{1}{2}\right) \\
&\ \vdots \\
&= 3^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= (3^{n-1})/2.
\end{aligned}
$$

よって $x_n = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + 1\right)$

問2.2 $x_{n+1} = r + \frac{1}{r}x_n$, $x_1 = r$.

(i) $r=1$ のとき $x_{n+1} - x_n = 1$ より x_n は公差1の等差数列

よって $x_n = n$.

(ii) $r \neq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \frac{r^2}{r-1} &= \frac{1}{r}\left(x_n - \frac{r^2}{r-1}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(x_{n-1} - \frac{r^2}{r-1}\right) \\
&\ \vdots \\
&= \frac{1}{r^n}\left(x_1 - \frac{r^2}{r-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ x_n &= \frac{1}{r^{n-1}}\left(-\frac{r}{r-1}\right) + \frac{r^2}{r-1} \\
&= \frac{r^2}{r-1}\left\{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}
\end{aligned}
$$

問2.3 $x_1 = 1$,

$$
\begin{array}{rl}
 & x_{n+1} = 2x_n - 3n \\
-) & x_n = 2x_{n-1} - 3(n-1) \quad n \geq 2 \\
\hline
 & x_{n+1} - x_n = 2(x_n - x_{n-1}) - 3
\end{array}
$$

$x_{n+1} - x_n = y_n$ (階差) とおくと

$$y_n = 2y_{n-1} - 3$$

$$
\begin{aligned}
y_n - 3 &= 2(y_{n-1} - 3) \\
&= 2^2(y_{n-2} - 3) \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1}(y_1 - 3)
\end{aligned}
$$

よって $y_n = 3 - 5 \cdot 2^{n-1}$

$n \geq 2$ のとき

$$
\begin{array}{rl}
 & x_n - x_{n-1} = 3 - 5 \cdot 2^{n-2} \\
 & x_{n-1} - x_{n-2} = 3 - 5 \cdot 2^{n-3} \\
 & \vdots \\
+) & x_2 - x_1 = 3 - 5 \cdot 2^0 \\
\hline
 & x_n - x_1 = 3(n-1) - 5\dfrac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}
\end{array}
$$

$$= -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 2.$$

よって $x_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3$

($n = 1$ のとき $x_1 = 1$ で成り立つ.)

3

問3.1

$$5x_{n+1} = 3x_{n+2} + 2x_n \quad (n \geq 1)$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

$$3(x_{n+2} - x_{n+1}) = 2(x_{n+1} - x_n)$$

$y_n = x_{n+1} - x_n$ とおくと

$$3y_{n+1} = 2y_n,\quad y_1 = x_2 - x_1 = 1$$

よって $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

問3.2

$n \geq 2$ のとき

$$x_n - x_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$+)\ x_2 - x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

よって $x_n = \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} = 3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

($n=1$ のときも成立)

$\boxed{4}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 7y_n \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}_{n+1} = {}^t(x_{n+1}, y_n)$, $\boldsymbol{x}_n = {}^t(x_n, y_n)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

とすると

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n \quad (n \geq 1)$$

よって $\boldsymbol{x}_n = A^{n-1}\boldsymbol{x}_1$

Aの固有値は $|\lambda I - A| = 0$ $((\lambda-3)(\lambda-5)=0)$ より

$$\lambda = 3, 5$$

$\lambda=3$の固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cは$c\neq 0$なるパラメタ)

$\lambda=5$ 〃 $c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (〃)

よって $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $X^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = X\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}X^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\cdot 3^n - 2\cdot 5^n & 8\cdot 3^n - 8\cdot 5^n \\ -3^n + 5^n & -2\cdot 3^n \cdot 4\cdot 5^n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_n = A^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\cdot 3^{n-1} - 6\cdot 5^{n-1} \\ -2\cdot 3^{n-1} + 3\cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

~~これはn=1でも成り立つ~~

よって $x_n = 8\cdot 3^{n-1} - 6\cdot 5^{n-1}$

$y_n = -2\cdot 3^{n-1} + 3\cdot 5^{n-1}$

(n=1でも成り立つ)