# 応用数学 II 第 2 回演習・課題 2 次元座標変換

## [1. 行列と座標変換] (12 点)

座標平面上で，原点を始点とするベクトルに対して以下の各座標変換を行う行列を示せ．

**問 1.1** 原点を中心に時計回りに $\pi/3$ だけ回転する座標変換.

**問 1.2** $x$ 軸に対する鏡映を与える座標変換.

**問 1.3** 原点を中心に反時計回りに $\pi/3$ だけ回転する座標変換.

**問 1.4** 直線 $y = \sqrt{3}x$ に対する鏡映を与える座標変換.

## [2. 直交行列と直交変換] (15 点)

**問 2.1** 任意のベクトル $\vec{x}$ について行列 $A$ が $\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \|$ を満たすとき，任意のベクトル $\vec{x}, \vec{y}$ について $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ が成り立つことを証明せよ.

**問 2.2** ある行列 $A$ によって，ベクトル $\vec{x}$ の長さが変わらないとき，つまり，$\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \|$ のとき，$A$ を (正規) 直交行列という．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ としたとき，行列 $A$ が直交行列になるための条件を求めよ.

**問 2.3** 直交行列 $A$ の逆行列が $A^T$ ($A$ の転置行列) となることを示せ．また，$A$ の行列式の値を求めよ.

## [3. 行列による座標変換の幾何学的意味] (45 点)

以下の行列 $A, B, C, D, E$ で表される座標変換はどのような幾何学的変換を行うかを説明せよ．また，これらのなかで直交変換はどれか調べよ．さらに各行列の逆行列を求め，その座標変換の幾何学的意味を説明せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## [4. 合成変換] (15 点)

原点を通り $x$ 軸となす角が $\theta$ である直線を $\ell$ とする．以下の問いに答えよ.

**問 4.1** 直線を $\ell$ の方程式を求めよ.

**問 4.2** 直線 $\ell$ への射影を表す座標変換を求めよ.

**問 4.3** 直線 $\ell$ に対する鏡映を与える座標変換を求めよ.

[**5. 変換の複数回適用**] (12 点)

座標平面上で，原点を始点とするベクトルに対して座標変換を行うことを考える．以下の問いに答えよ．(三角関数に関しては値を求めておくこと)

**問 5.1** 直線 $y = \tan\dfrac{\pi}{3}x$ の鏡映を与える座標変換 $A$ を求めよ．

**問 5.2** 問 5.1 で求めた $A$ に関して，$A^n$ (ただし $n = 1, 2, \cdots$) の一般項を求めよ．

**問 5.3** 原点を中心に反時計方向に $2\pi/3$ だけ回転する座標変換 $B$ を求めよ．

**問 5.4** 問 5.3 で求めた $B$ に関して，$B^n$ (ただし $n = 1, 2, \cdots$) の一般項を求めよ．