

応用数学II 第3回演習(小テスト) 線形代数の復習

試験に関する諸注意

- 以下で tA は A の転置行列, \vec{x} はベクトル, $\|\vec{x}\|$ は \vec{x} のノルム, $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は \vec{x} と \vec{y} の内積, そして, I は単位行列をあらわします.
- 正しい答えを一つだけ選ぶ問題と, すべて選ぶ問題があります.
- 正しい答えをすべて選ぶ問題は完全一致で採点します.

問1 以下の各記述について, 正しいものは「はい」, 間違っているものは「いいえ」で答えなさい. (40点)

問1.1 (4, 5, 6, 1, 3, 2) は奇順列である.

問1.2 A, B, C がすべて n 次正方行列のとき, $\det(ABC) = \det(C)\det(B)\det(A)$ が成り立つ.

問1.3 3次正方行列の行列式に関して,
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos(\alpha + \beta) \\ \cos \alpha & 1 & \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \cos \beta & 1 \end{vmatrix} = 1$$
 である.

問1.4 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ は交代行列である.

問1.5 \vec{x} と \vec{y} が一次従属のとき $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ である.

問1.6 A が正則行列のとき $\det(A^{-1})\det(A) = 1$ である.

問1.7 P を n 次正則行列, A を n 次正方行列としたとき $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$ が成り立つ.

問1.8 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ が正則行列のとき $a = b$ である.

問1.9 n 次正方行列 A の行列式の値を a としたとき, A の1つの行(または列)のすべての要素を λ 倍すると, その行列式の値は $\lambda^n a$ となる.

問1.10 2つのベクトル \vec{x}, \vec{y} が垂直である場合, $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ が成り立つ.

問2 $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$ とする. 方程式 $\det(A) = 0$ の解を以下の中からすべて選びなさい. (10点)

1. $x = -5$ 2. $x = -4$ 3. $x = -3$ 4. $x = -2$ 5. $x = -1$

6. $x = 1$ 7. $x = 2$ 8. $x = 3$ 9. $x = 4$ 10. $x = 5$

問3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ の階数 (r とする) を以下から選びなさい. (10点)

1. $r = 1$ 2. $r = 2$ 3. $r = 3$ 4. $r = 4$

問4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい. (15点)

問4.1 A の固有値 (λ とする) を以下の中からすべて選びなさい.

1. $\lambda = -3$ 2. $\lambda = -2$ 3. $\lambda = -1$ 4. $\lambda = 0$ 5. $\lambda = 1$

問4.2 問4.1 で求めた A の固有値 λ のうち最も小さな固有値に対する固有ベクトルを以下の中から選びなさい. ただし t は非ゼロの任意のパラメタとする.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ 5. 左の 1, 2, 3, 4 のいずれでもない.

問4.3 A を対角化するための正則行列 (相似行列) を以下の中から選びなさい.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. 上の 1, 2, 3, 4 のいずれでもない.

問5 2次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の n 乗を以下の中から選びなさい. (15点)

1. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n + (-2)^{n+2} & 4 \cdot 5^n + (-2)^{n+2} \\ 3 \cdot 5^n + 3(-2)^n & 4 \cdot 5^n + 3(-2)^n \end{pmatrix}$ 2. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n - (-2)^{n+2} & 4 \cdot 5^n + (-2)^{n+2} \\ 3 \cdot 5^n + 3(-2)^n & 4 \cdot 5^n - 3(-2)^n \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n + (-2)^{n+2} & 4 \cdot 5^n - (-2)^{n+2} \\ 3 \cdot 5^n - 3(-2)^n & 4 \cdot 5^n + 3(-2)^n \end{pmatrix}$ 4. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \cdot 5^n - (-2)^{n+2} & 4 \cdot 5^n - (-2)^{n+2} \\ 3 \cdot 5^n - 3(-2)^n & 4 \cdot 5^n - 3(-2)^n \end{pmatrix}$

5. 上の 1, 2, 3, 4 のいずれでもない

問 6 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を以下の中から選びなさい。(10 点)

1. $\frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ 2. $\frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

5. 上の 1, 2, 3, 4 のいずれでもない