

応用数学II 第4回演習・課題 最小二乗法，行列の応用

[1. 差分方程式] (20点)

2階差分方程式 $y_{k+2} = 7y_{k+1} - 6y_k$ (ただし $k = 0, 1, 2, \dots$) を初期条件 $y_0 = 5, y_1 = 10$ のもとで解くことを考える。

問 1.1 $x_k = \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$ とおいたとき x_0 を求めよ。また， $x_{k+1} = Ax_k, y_k = Cx_k$ と表現したときの行列 A と C を求めよ。(ヒント: A は2次の正方行列， C は1行2列の行列である)

問 1.2 上記で求めた行列 A に関して A^k を求めよ。

問 1.3 x_k の一般項を求めよ。

問 1.4 y_k の一般項を求めよ。

[2. 行列の巾乗 (1)] (20点)

問 2.1 A は n 次の正方行列， I は n 次の単位行列とすると，自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示せ。ただし $\binom{m}{k} = {}_m C_k$ である。

$$(A + I)^m = A^m + \binom{m}{1} A^{m-1} + \binom{m}{2} A^{m-2} + \dots + \binom{m}{m-1} A + I.$$

問 2.2 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について X^{15} を求めよ。

[3. 行列の巾乗 (2)] (15点)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

問 3.1 A の固有値を求めよ。また， A は対角化可能か？

問 3.2 $(A - 3I)^2$ を求めよ。

問 3.3 $A = (A - 3I) + 3I$ として A^n を求めよ。

[4. 最小二乗法] (30点)

xy 平面上の4点 $(1, 1), (3, 3/2), (4, 5), (6, 11/2)$ にフィットする直線 ($y = ax + b$ とする) を最小二乗法により求めることを考える.

問 4.1 残差二乗和 $S(a, b)$ を求めよ.

問 4.2 $\frac{\partial S(a, b)}{\partial a}$ と $\frac{\partial S(a, b)}{\partial b}$ を求めよ.

問 4.3 $\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = 0, \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = 0$ として a, b を求めよ.

問 4.4 最小二乗法の一般逆行列による定式化手法を用いて a と b を求めよ (計算過程を詳細に示せ).

[5. 遷移確率行列] (15点)

1日単位で天気に変化する地域があり, 今日が晴れであるか雨であるかによって翌日の天気が確率的に決まる (天気は晴れか雨しかない). すなわち, 今日が晴れるときには翌日は確率 q_{11} で晴れになり, 確率 q_{10} で雨になる. また, 今日が雨るときには翌日は確率 q_{01} で晴れになり, 確率 q_{00} で雨になる.

問 5.1 今日が晴れるとき, 明後日が晴れる確率を求めよ.

問 5.2 今日が晴れるとき, n 日後が晴れる確率と雨になる確率を求めよ. ただし, $q_{11} = r, q_{00} = r (0 < r < 1)$ とする.

問 5.3 無限日数が過ぎた後に, 晴れている確率を求めよ (その根拠を示せ).