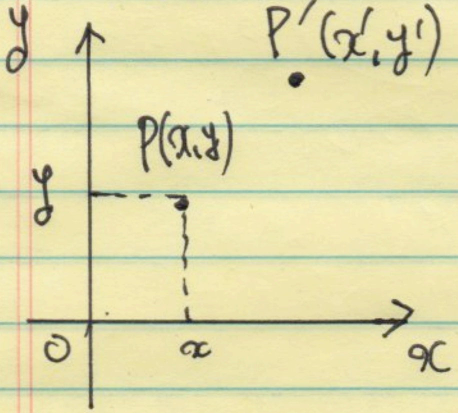
2023 S Applied Math 2 (3rd week)

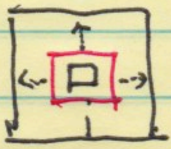
◎ 2次元座標変換(1次変換)

⇒ 拡大・縮小, 回転, 射影, 点対称,
鏡映, スキュー (projection)
(reflection) (skew)

平行移動だけ特殊
(2次正方行列で表現できない)

① 拡大・縮小





$$\begin{cases} x' = S_x x \\ y' = S_y y \end{cases}$$

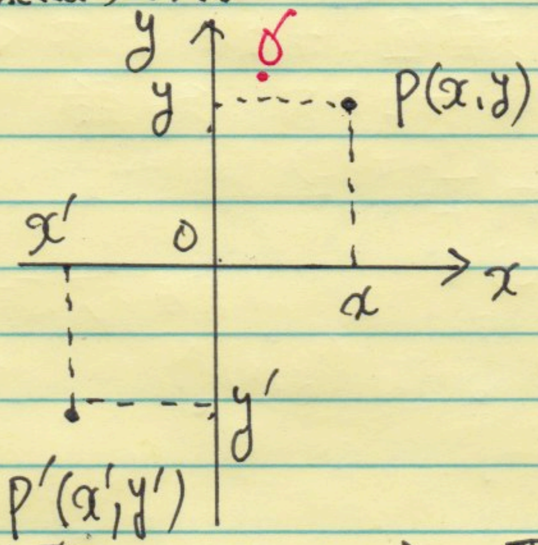
S_x と S_y は
定数、S
スケール

$S_x, S_y > 1$ のとき拡大
$0 < S_x, S_y < 1$ 〃 縮小

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

座標変換の行列

② 原点対称

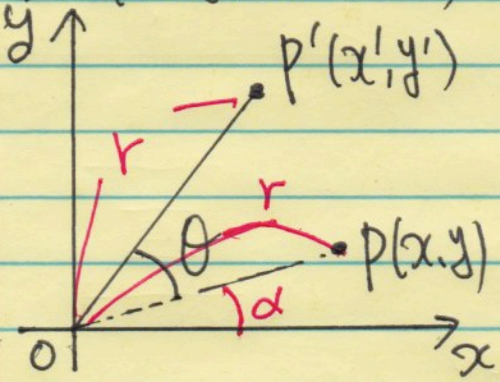


$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

③ 回転(rotation)

原点を中心に反時計回りに角θだけ回転



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

$x' = r\cos(\alpha+\theta)$ 加法定理

$= r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)$

$= x\cos\theta - y\sin\theta$ ⋯①

$y' = r\sin(\alpha+\theta)$

$= x\sin\theta + y\cos\theta$ ⋯②

①と②より $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

三角関数の加法定理

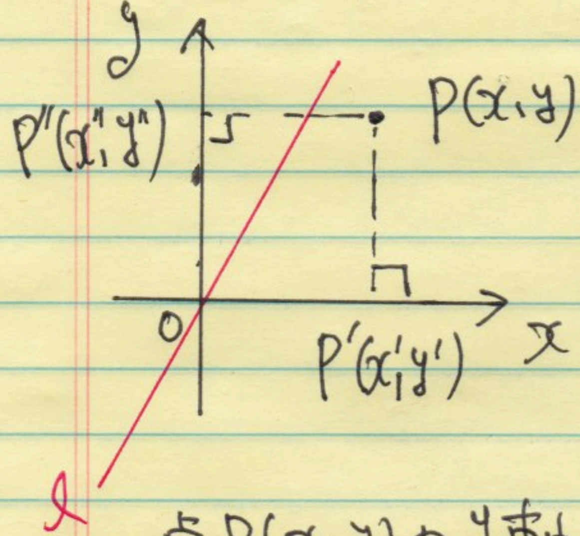
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

オイラーの公式

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

④ 射影(projection)



点P(x,y)のx軸への射影をP'(x',y')とすると

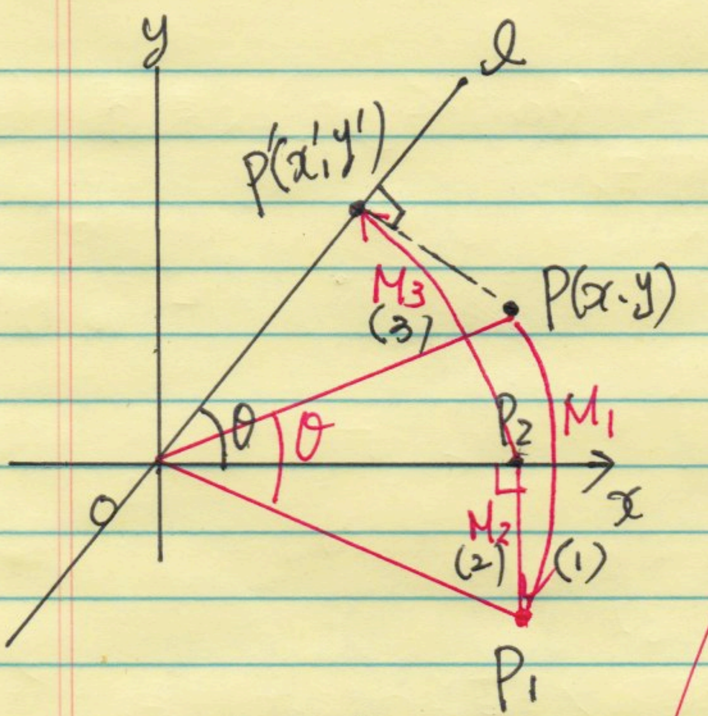
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

点P(x,y)のy軸への射影をP''(x'',y'')とすると

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$l: y = \tan\theta\, x$
への射影

(1)の座標変換
原点を中心に$-\theta$回転 $M_1: \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2)の座標変換
x軸への射影 $M_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

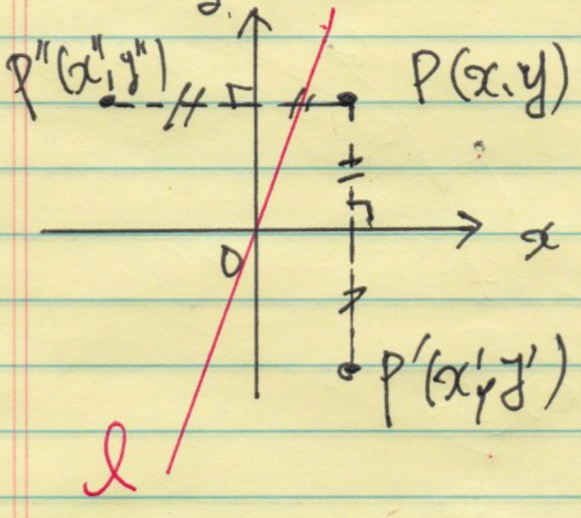
(3)の座標変換
原点を中心のθ回転 $M_3 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

⑤ 鏡映 (reflection) (線対称)



点P'(x',y')は点Pのx軸に対する鏡映

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

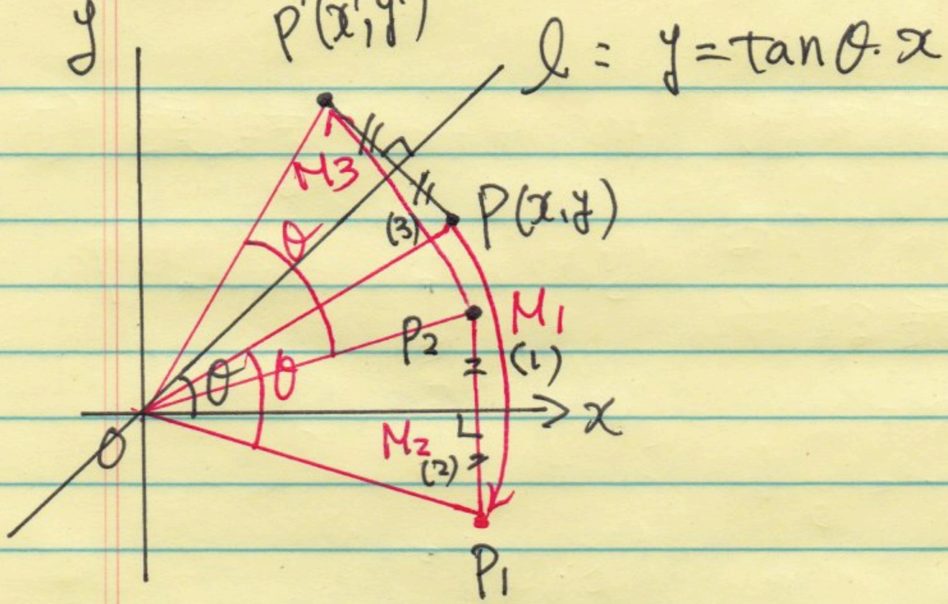
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

点P''(x'',y'')は点Pのy軸に対する鏡映

$$\begin{cases} x'' = -x \\ y'' = y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

lに対する鏡映は?



(1) : 原点を中心に$-\theta$回転 $M_1 : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) x軸に対する鏡映 $M_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) 原点を中心にθ回転 $M_3 : \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

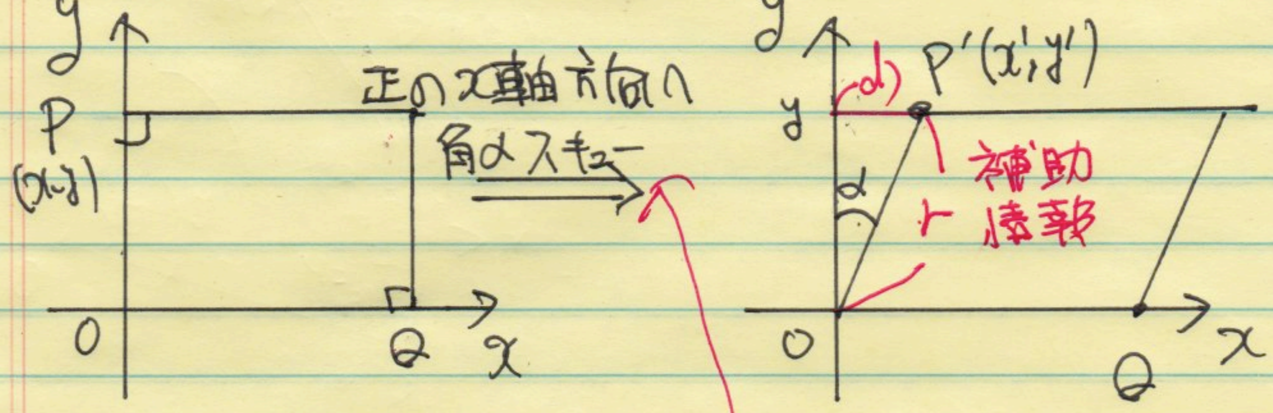
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2倍角公式

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

⑥ スキュー(skew) せん断 (ゴム膜上での引き伸し)

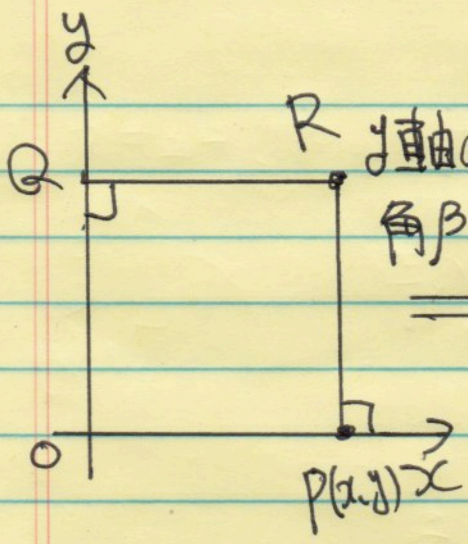


$$\begin{cases} r\cos\alpha = y & \cdots ① \\ r\sin\alpha = d & \cdots ② \end{cases}$$

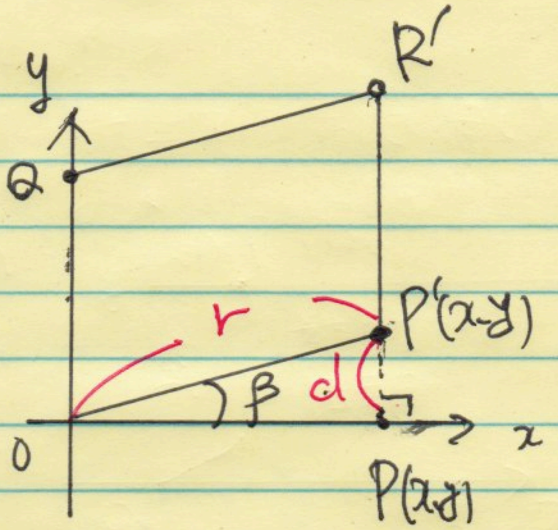
①より $r = \dfrac{y}{\cos\alpha}$ なので ②に代入して $d = \tan\alpha\, y$

よって $\begin{cases} x' = x + \tan\alpha\, y \\ y' = y \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

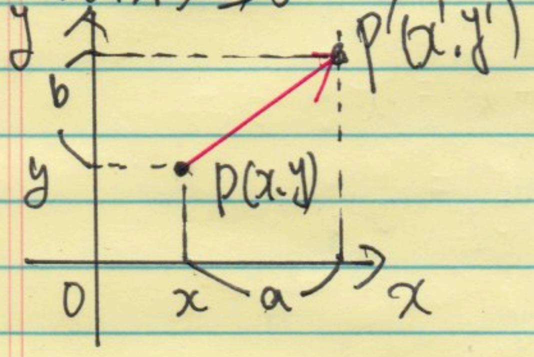


y軸の正の方向へ
角βスキュー



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \tan\beta\, x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

⑦ 平行移動



$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

この関係は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のように
2次正方行列 A' で表現できない!

$\boxed{\text{アフィン変換}}$

ではどうする?

答え: 平行移動を含めた2次元座標変換には
同次座標という表現を用いる.

その他の座標変換

平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

定数

定数　　定数

アフィン変換 (affine) 類似