AppMath 2 (10th) 2023

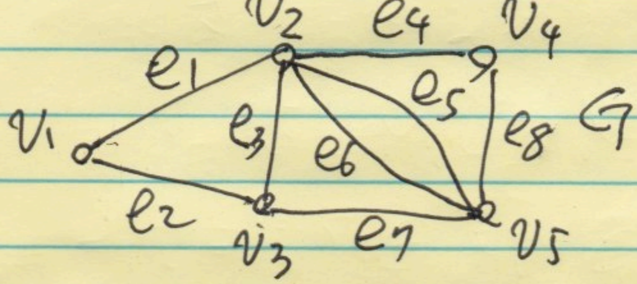
「ネットワークの数理(I)」

☆ 歩道と道(パス)

グラフ $G=(V,E)$ において

- 歩道(walk)：頂点と辺を交互にたどった列
- 小道(trail)：すべての辺が異なる歩道
- 道(path)：すべての頂が異なる小道
- 閉路：最初の頂点と最後の頂点が同じ小道

応用 → 配送、巡回



歩道：(例) $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_2, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$

長さ：5

小道：(例) $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_2, v_1$ 長さ：3

閉路

道：(例) $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5$

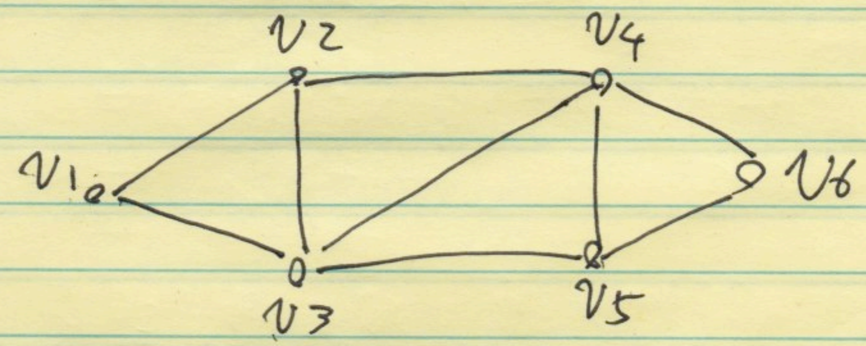
長さ：3

◎ グラフの行列表現 → 隣接行列

頂点がn個の単純無向グラフ(辺に向きがないグラフ)について $n \times n$ 正方行列 $A=[a_{ij}]$ を次のようにつくる。

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} = 1 & \text{if 頂点 } v_i \text{ と } v_j \text{ が辺で結ばれている。} \\ a_{ij} = a_{ji} = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(例)



G

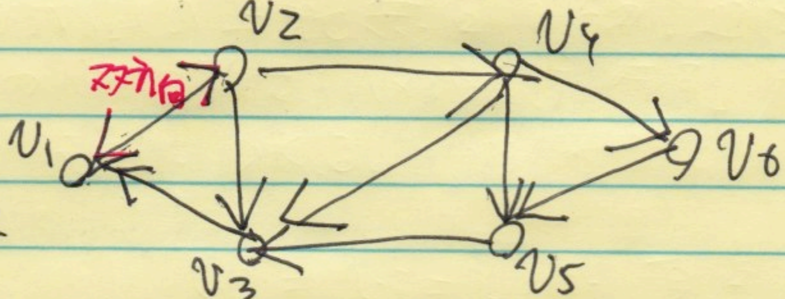
グラフGの隣接行列は?

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

対称行列

${}^tA = A$

$$
\text{グラフ}\begin{cases}\text{無向グラフ (undirected)}\\ \text{有向グラフ (directed)}\end{cases}
$$



G_2

有向グラフGの隣接行列 $A=[a_{ij}]$

$$
\begin{cases} a_{ij}=1 & \text{if 頂点 } v_i \text{ から } v_j \text{ の向きに矢印(辺)がある}\\ a_{ij}=0 & \text{otherwise}\end{cases}
$$

グラフG_2の隣接行列A

$$
A_2=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}
$$

Aは対称行列とは限らない!

☆ グラフの中にある，特定の長さの歩道の総数

定義。単純グラフ G の頂点 v_i から v_j へのへの長さ n の歩道の総数を $N_{ij}^{(n)}$ とあらわす。

グラフ G の隣接行列を $A=[a_{ij}]$ とする

$n=1$ のケース

$N_{ij}^{(1)}$: v_i から ~~v_i~~ v_j への長さ 1 の歩道の総数は

a_{ij} である. $N_{ij}^{(1)}=a_{ij}$.

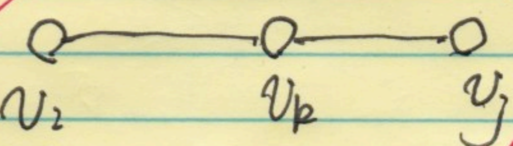
よって グラフ G の長さ 1 の歩道の総数を $N^{(1)}$ とすると

$$N^{(1)}=\sum_j\sum_i N_{ij}^{(1)}=\sum_j\sum_i a_{ij} \quad /\!/$$

○ $n=2$ のケース

$N_{ij}^{(2)}$：頂点 v_i から v_j への長さ2の歩道の総数

(状況分析) 頂点 v_i から v_j への長さ2の歩道があるというのはどういう状況？



この状況を ~~接~~ 隣接行列の要素で考えると

$a_{ik}=1$ かつ $a_{kj}=1$

つまり $a_{ik}\cdot a_{kj}=1$

よって v_i から v_j への長さ2の歩道の総数 $N_{ij}^{(2)}$ は

$$N_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot a_{kj} = \underline{a_{i1}\cdot a_{1j}+a_{i2}\cdot a_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot a_{nj}}$$

これは A^2 の $\underline{ij\text{成分}}$ と同じ.

↳ $a_{ij}^{(2)}$ と表わす.

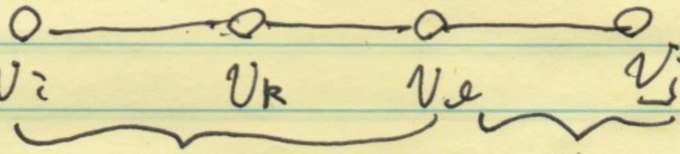
$$N^{(2)}=\sum_i\sum_j a_{ij}^{(2)}=\sum_i\sum_j N_{ij}^{(2)}$$

与えられたグラフの長さ2の歩道の総数

- $n=3$のケース

$N_{ij}^{(3)}$：頂点v_iからv_jへの長さ3の歩道の総数

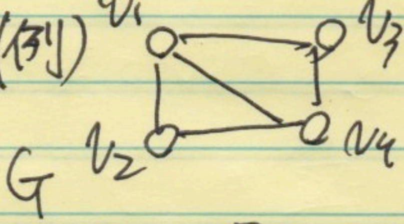
(状況分析)



v_iからv_lへの長さ2の歩道がある。　v_lからv_jへの長さ1の歩道がある

よって $N_{ij}^{(3)} = \underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(2)} \cdot a_{lj}}_{A^3\text{のij成分 } a_{ij}^{(3)}}$

(例)



グラフGの隣接行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ よってGの $N^{(2)} = 26$

定理：m個($m \geq 1$)の頂点からなるグラフGの隣接行列をAとする。このときA^nのij成分は頂点v_iからv_jへの長さnの歩道の総数$N_{ij}^{(n)}$となる

よって $N^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} N_{ij}^{(n)} = \sum_i \sum_j a_{ij}^{(n)}$

(証明) 数学的帰納法による。