

App Math (12th) 2023  
⑤ 教え上げ理論I(順列・組合せ)

Quiz 1: 3つの異なる物を4人のうちの誰かに1つずつあげる方法は何通りあるか?

物: (A) (B) (C)

人:  $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り

順列 permutation

$$4P_3$$

Quiz 2: 3つの同じ物を4人のうちの誰かに1つずつあげる方法は何通りあるか?

組合せ Combination

$$\text{定式} \quad \boxed{nC_m = \frac{nP_m}{m!}} \quad \begin{aligned} &= \frac{4C_3 = \frac{4P_3}{3!}}{=} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

$(n \geq m)$



Quiz 3:  $m$  の異なる物を  $n$  人に与える方法は何通りあるか?  
( $m, n \geq 0$ )

(i)  $m = n$  のとき  
 $m! = n!$

(ii)  $m > n$   
 $m P n = \frac{m!}{(m-n)!}$

(iii)  $n > m$   
 $n P m = \frac{n!}{(n-m)!}$

重要な事  $0! = 1$  定式

$$m C 0 = \frac{m!}{0! m!} = 1$$

応用

70日野球の日本シリーズ(先に4勝した方が勝ち)である4-4の4勝3敗で復勝(5-2)の2勝3敗の10日シリーズはいくつあり?

$$7C4 = 7C3$$

$$m+n C m = m+n C n$$

公式

~~0000XXXX~~

~~00X00XX~~

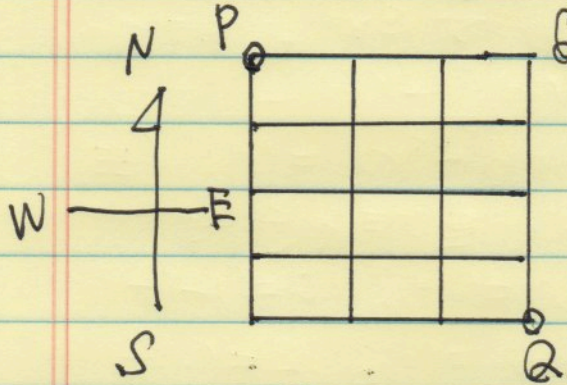
1 2 3 4 5 6 7

3-3

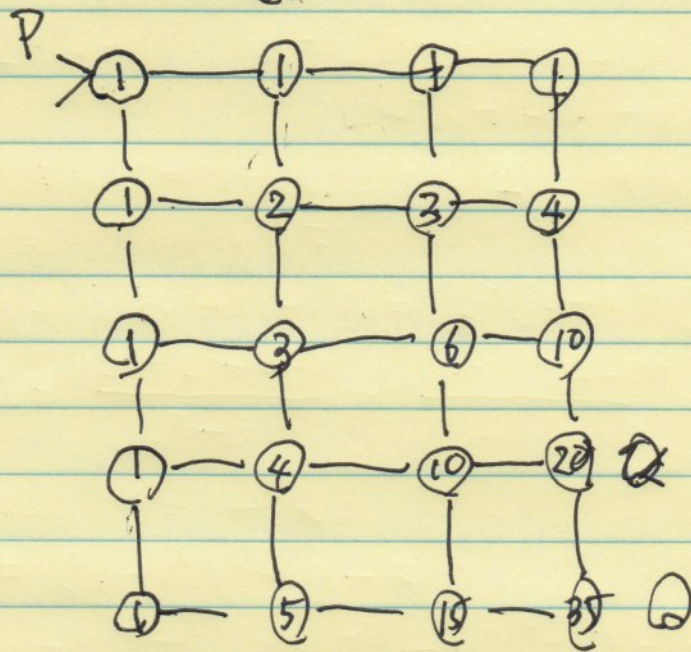
答えは  $6C3$



# ◎ 二項定理の性質

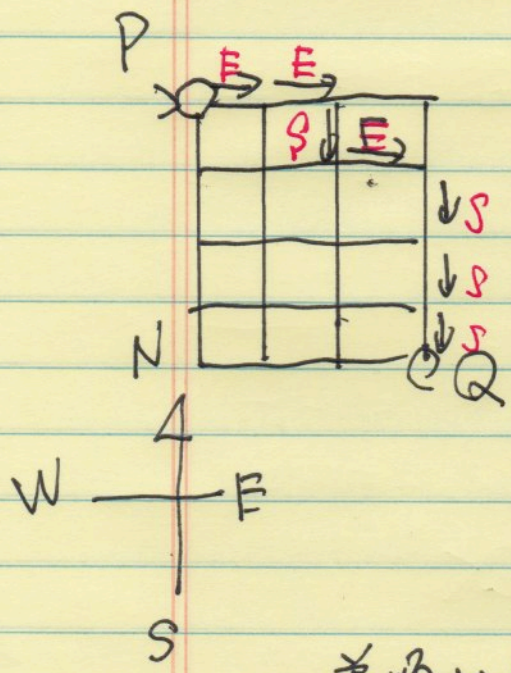


Quiz 4: P地点からQ地点までの道順は何通りありますか?  
ただし遠回りはいしる..  
ものとする。





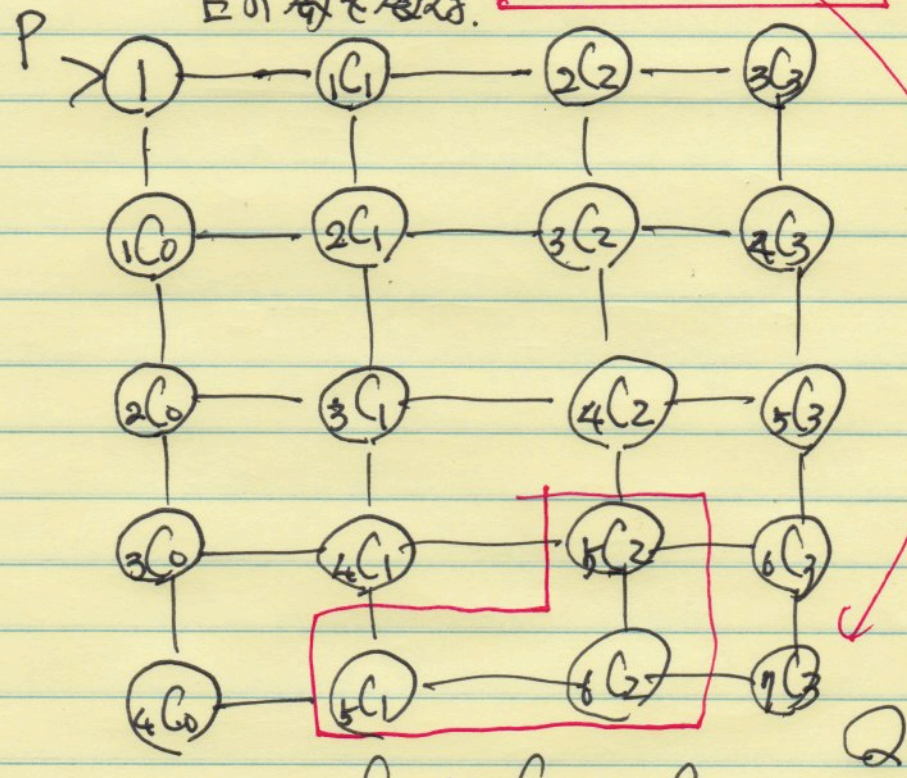
Quiz 4の組合せによる解決



- (I) 左の図の道順を移動した後の12歩で表現してみる (E, E, S, E, S, S, S)
- (II) 道の7の長さLは常に7.
- (III) Eは3回現れる.
- (IV) Sは4回現れる.

道順は何通り?  $7C_3 = 7C_4 = 35$

Eの数を数える.  $x+yC_x = x+yC_y$



$7C_1 + 5C_2 = 6C_2$

↓一般化

$m-1C_{n-1} + m-1C_n = mC_n$   
公式



## ○ 二項定理

$$(x+y)^n = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} y + \dots + {}_n C_{n-1} x y^{n-1} + {}_n C_n y^n$$

(証明) 数学的帰納法による。

$n=1$  のとき

$$(x+y)^1 = x+y = {}_1 C_0 x + {}_1 C_1 y$$

$n=k$  のとき

$$(x+y)^k = {}_k C_0 x^k + {}_k C_1 x^{k-1} y + \dots + {}_k C_{k-1} x y^{k-1} + {}_k C_k y^k$$

と仮定する。

$$(x+y)^{k+1} = {}_k C_0 x^{k+1} + {}_k C_1 x^k y + \dots + {}_k C_{k-1} x y^k + {}_k C_k y^{k+1}$$

$$= {}_{k+1} C_0 x^{k+1} + \dots + {}_{k+1} C_k x y^k + {}_{k+1} C_{k+1} y^{k+1}$$

一般項  $\dots + {}_k C_i x^{k+1-i} y^i + \dots$   
 $+ {}_k C_{i-1} x^{k-i} y^{i+1} + \dots$

$$\boxed{({}_k C_i + {}_k C_{i-1}) x^{k+1-i} y^i = {}_{k+1} C_i x^{k+1-i} y^i}$$

$$\rightarrow = {}_{k+1} C_0 x^{k+1} + {}_{k+1} C_1 x^k y + \dots + {}_{k+1} C_k x y^k + {}_{k+1} C_{k+1} y^{k+1}$$

よって  $n=k+1$  のときも成り立つ

以上の二つより一般の  $n$  で式は成り立つ //

${}_k C_i x^{k+1-i}$  変化しない値を見つけた!  
~~invariant~~  
 invariant