2023 (13th)

数え上げ理論II (差分方程式)

微分方程式 (連続時間を扱う) 力学・運動
差分方程式 (離散時間を扱う)
時間を「期」で表わす.

どういうものを扱うのか?
(i) ある変数 ~~数~~ の値が離散時間である規則に従って変化する。
(ii) 第 $(n+1)$ 期の値 x_{n+1} が第 n 期の値 x_n によって定められる.

$$x_{n+1} = f(x_n) \cdots\cdots ①$$

と表わされる.

① の方程式は一階差分方程式と呼ばれる.
(1st order)

(二階差分方程式
$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$

(例) ・感染症
・企業業績 (四半期ごとの売上げ)
・年ごとのある野生動物の頭数変化

①式は初期値 x_0 を与えると順に $x_1, x_2, \cdots$ が求まる。この数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を①の解という。

一般解：一般の n に対して x_n を求める.

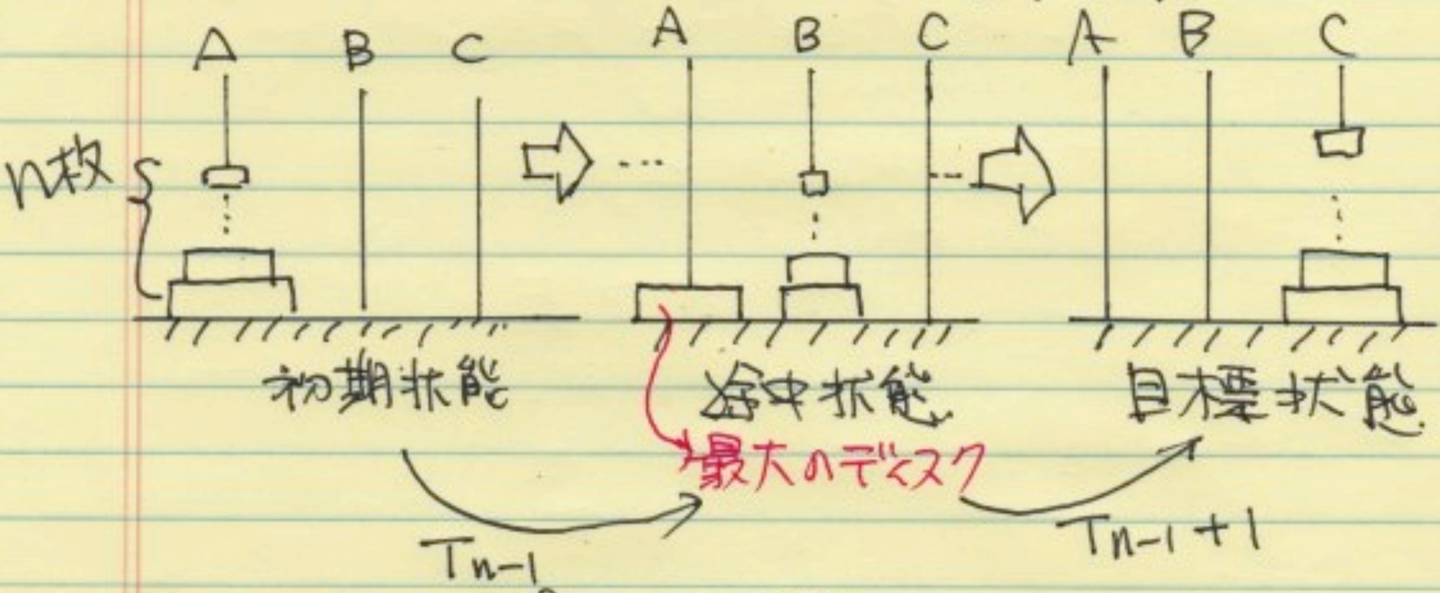
$n \to \infty$ のとき x_n を一定の値 α に近づくとき α を $\{x_n\}$ の極限値と呼び $\{x_n\}$ は α に収束するという.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

☆ 1階差分方程式の事例

ハノイの塔

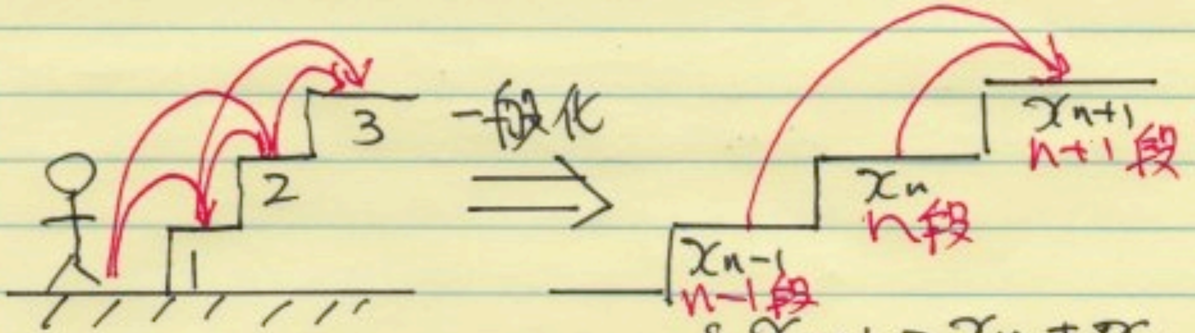
Quiz 5：n 枚をAからCへ移す手数 T_n は？



$$\begin{cases} T_n = 2T_{n-1} + 1 \\ T_1 = 1 \leftarrow \text{初期値} \end{cases}$$

㊉ 二階差分方程式の例

Quiz 6. N段の階段を上がるのに、一足で1段もしくは2段上がることとする。この場合上がり方の総数はいくつ?



$$
\begin{cases}
x_{n+1} = x_n + x_n \\
x_1 = 1,\ x_2 = 2
\end{cases}
$$

◎ 差分方程式の解法
- 一階差分方程式
- 二 〃
- 連立差分方程式(変数が複数)

○ 一階差分方程式

(例) $x_n = a x_{n-1} + b \quad (a \neq 1) \cdots ①$

x_0 が初期値として与えられている。

①を以下の形に変形する。

$$(x_n - \alpha) = a(x_{n-1} - \alpha) \cdots ②$$

この変形の意図は$(x_n - \alpha)$を等比数列として扱いたいということ.

②式を展開して①式と比較する

$$x_n = a x_{n-1} + \alpha(1-a) \cdots ③$$

よって $b = \alpha(1-a)$

$$\therefore \alpha = \frac{b}{1-a}$$

ok

αを②式に代入すると

$$\left(x_n - \frac{b}{1-a}\right) = a\left(x_n - \frac{b}{1-a}\right)$$

$y_n = x_n - \frac{b}{1-a}$ とおくと

$$y_n = a^1 y_{n-1} = a^2 y_{n-2} = \cdots = a^k y_{n-k} = \cdots = a^n y_0$$

aの指数とyの右下添えのインデックスに注目

$$x_n - \frac{b}{1-a} = a^n\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

よって $x_n = a^n x_0 + \frac{a^n - 1}{a-1} b$ //

一般解

○ 二階差分方程式の解法

例 $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ⋯⑤

⑤式が

$$(x_{n+1} - \alpha x_n) = \beta(x_n - \alpha x_{n-1}) \cdots ⑥$$

の形式に変形できたと仮定する。

↳ 意図：等比数列を用いたい。

⑥式を展開して⑤式の各係数と比較する。

$$x_{n+1} = (\alpha + \beta)x_n - \alpha\beta x_{n-1}$$

よって $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$

二次方程式の解と係数の関係より

α、β は $t^2 - t - 1 = 0$ の解となっている。

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ここで $y_n = x_{n+1} - \alpha x_n$ とおくと

$$y_n = \beta^1 y_{n-1} = \beta^2 y_{n-2} = \cdots = \beta^k y_{n-k} = \beta^{n-1} y_1 = \beta^{n-1}(x_2 - \alpha x_1) = \beta^{n-1}(2 - \alpha)$$

よって $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta^{n-1}(2 - \alpha)$ ⋯⑦

次に $z_n = x_{n+1} - \beta x_n$ とおくと

$$z_n = \alpha z_{n-1} = \alpha^2 z_{n-2} = \cdots = \alpha^k z_{n-k} = \cdots = \alpha^{n-1} z_1 = \alpha^{n-1}(2 - \beta)$$

よって

$$x_{n+1} = \beta x_n + \alpha^{n-1}(2 - \beta) \cdots ⑧$$

⑦式から⑧式を引くと

$$0=(\alpha-\beta)x_n+\beta^{n-1}(2-\alpha)-\alpha^{n-1}(2-\alpha)$$

$$\therefore x_n=\frac{\beta^{n-1}(2-\alpha)-\alpha^{n-1}(2-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdots ⑨$$

注）一般解を求めたら初期値による検算を行う！

○ 連立一階差分方程式の解法

$$\begin{cases} x_n=f(x_{n-1},y_{n-1}) \\ y_n=g(x_{n-1},y_{n-1}) \end{cases}$$ 初期値 x_0、y_0 が与えられている。 $(n=0,1,2,\cdots)$

(例)

$$\begin{cases} x_{n+1}=-x_n+y_n/2 \\ y_{n+1}=3x_n-y_n/2 \end{cases} \cdots ⑩$$ x_0 と y_0 が初期値として与えられていると.

$$\mathbf{x}_n={}^t(x_n,y_n) \quad A=\begin{pmatrix}-1 & 1/2 \\ 3 & 1/2\end{pmatrix}$$

⑩式は $\mathbf{x}_{n+1}=A\mathbf{x}_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$$=A^2\mathbf{x}_{n-1}=\cdots=A^{n+1}\mathbf{x}_0$$

行列 A の固有値 λ は固有方程式 $|\lambda I-A|=0$ の解.

$$|\lambda I-A|=\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda-1=0$$

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda+2)=0$$

よって $\lambda=\frac{1}{2},-2$

$\lambda = 1/2$ に対する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. ただし c は $c \neq 0$ なる パラメタ

$\lambda = -2$ 〃 $c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ 同上.

相似行列 $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$$ (← これを Λ とおく)…⑪

$$\underbrace{(P^{-1}A\cancel{P})(\cancel{P^{-1}}AP)\cdots(\cancel{P^{-1}}AP)}_{n\text{コ}} = \Lambda^n$$

つまり $P^{-1}A^nP = \Lambda^n \left\{= \begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\0 & (-2)^n\end{pmatrix}\right\}$

よって $A^n = P\Lambda^nP^{-1}$

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = x_n = A^n x_0 = P\Lambda^nP^{-1}x_0$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n} & 0\\0 & (-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3(-2)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - (-2)^n\\ 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6(-2)^n & 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

よって x_n, y_n の一般解が求まる。