Fourier級数とその熱波動方程式への応用

Fourier Series and its application to Heat and Wave Equation

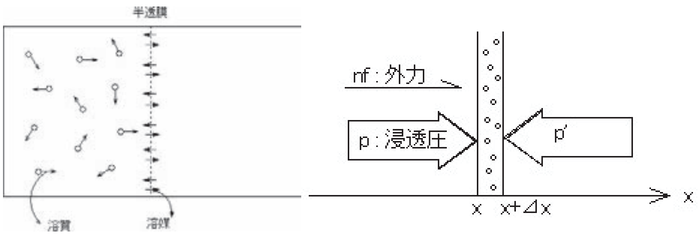
氏名 Name　赤坂寛 Yutaka Akasaka　国田美穂子 Mihoko Kunita　今野北斗 Hokuto Konnno　日下朋美 Tomomi Kusaka

目的：Fourier級数による熱伝導の初期境界値問題および、ブラウン運動による拡散方程式を理解することである。
Purpose : Mathmatical and physical approach to understand the heat equation

物理的アプローチ

分子の実在が仮説であった時代に、アインシュタインは熱の物理を分子が実在するという立場から考察していた。そして、分子論に基づく熱力学について、その適応限界をエネルギーの「ゆらぎ」に見出した。ブラウン運動はそれを視覚的に証明するものである。

In an age when the existence of molecules are a hypothesis Einstein was studying the physics of heat on this hypothesis. He had found the fluctuation of enegy as the limit suitable for thermodynamics. It is Brownian Movement that proves this fluctuation graphically.



上図について、力学的に式を導出する。
We lead the dynamic relation expression on avobe chart.
（断面積 S）= 1 として、

$$nf\,\Delta x = p' - p$$

$\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = nf$$

ここで、気体の状態方程式を適用し、数密度 $n = \frac{zN_A}{V^*}$ を定義すると、以下の式が導ける。

Here, apply to the state equation of gas, and define the density of number. We can lead the following equation.

$$f = \frac{RT}{N_A}\frac{\partial n/\partial x}{n}$$

この式の導出までは終了した。
We have finished here.

今後、以下の式を導出する。
From now, we will lead following equations.

1. アインシュタインの関係式(Relational expression of Einstein)

$$N_A = \frac{RT}{6\pi\eta a D}$$

2. 拡散方程式(diffusion equation)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

数学的アプローチ

熱方程式に対する初期境界値問題

The initial-boundary value problems for the heat equations.

熱は、温度の高い方から低い方へ流れる。ある瞬間における単位時間あたりの熱流量は、この瞬間の温度勾配に比例する。これが熱伝導の法則である。

Heat flows to the lower one from the one where temperature is higher. Heat flux is proportion to this instantanious temperature slope per unit time. This is the law of heat donduction.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x^2}u(t,x) \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$$

Dirichletの境界条件(boundary conditions of Dirichlet)：

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$$

この境界条件は、両端での熱の移動が迅速であることを意味する。すなわち針金の両端を氷で冷やしている状態である。

Dirichlet boundary conditions express the state where ice is cooling the both ends of wire whese movement of the heat in the point of on end is quick.

Neumannの境界条件(boundary conditions of Neuman)：

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,\pi) = 0$$

この境界条件は、両端での温度勾配がないことを意味する。いわゆる断熱条件であり、針金の両端を断熱材で支えている状態である。

Neumann boundary conditions mean that there is no temperature slope at both of ends, there are no receipts and payments of heat. It's the so-called heat isilation conditions. Supporting the end of both of wire with thermaoisolation realize it.

初期条件(initial conditions)：

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

解の構成(solution)：

1. Diriclet

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_n \exp(-n^2 x)\sin(nx)\right)$$

2. Neumann

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \exp(-n^2 x)\cos(nx)\right)$$

u(t, x)は、DirichletとNeumannの場合で$[\varepsilon,\infty)$　($\varepsilon>0$)では一様収束する。また、各項は連続なのでu(t, x)は連続である。

u(t,x) converges uniformly on $[\varepsilon,\infty)$ ($\varepsilon>0$). Each term is continuous and so is u(t,x).

上の方程式はC^∞関数で項別微分可能である。項別微分を実行すれば、u(t, x)が微分方程式を満たしている。

The upperequation is C^∞function and differentiation term by term is possible for it. If the differentiation term by term is carried out, u(t,x) satisfys differential equation.

解u(t, x)は、$(0,\infty)\times[0,\pi]$で一様収束する。よって、u(t, x)は$(0,\infty]\times[0,\pi]$で連続である。

u(t,x) is uniformed convergence in the interval $(0,\infty)\times[0,\pi]$.