AI2 8th week

1

◎ 合成性の破たん.

(例) 確率事象

H_1 : 1回目にコインを投げて表が出る.

T_1 : 〃 裏 〃

H_2 : 2回目にコインを投げて表が出る.

P(A)	P(B)	$P(A \vee B)$
$A=H_1$ $P(H_1)=\frac{1}{2}$	・$B=H_1$ $P(H_1)=\frac{1}{2}$	・$A=H_1, B=H_1$ $P(H_1 \vee H_1)=P(H_1)=\frac{1}{2}$
	・$B=T_1$ $P(T_1)=\frac{1}{2}$	・$A=H_1, B=T_1$ $P(H_1 \vee T_1)=1$
	・$B=H_2$ $P(H_2)=\frac{1}{2}$	・$A=H_1, B=H_2$ $P(H_1 \vee H_2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\Downarrow$

合成性が成り立たない.

◎ ベイジアンネットワーク

このパートで扱う確率変数は論理確率変数とす

$$P(A) \overset{\text{def}}{=} P(A = \text{true}) \quad (\text{A が真である確率})$$

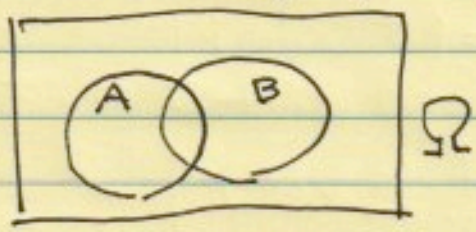
$$P(\neg A) \overset{\text{def}}{=} P(A = \text{false})$$

注：一般のベイジアンネットワークでは
そういう制限はない。

◎ 確率の公理 (3)

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

選言



◎ 条件付確率

$$P(\text{Cavity} \mid \text{Toothache})$$

$$= \frac{P(\text{Cavity} \wedge \text{Toothache})}{P(\text{Toothache})}$$

$$= \frac{P(\text{Cavity} \wedge \text{Toothache})}{P(\text{Toothache} \wedge \text{Cavity}) + P(\text{Toothache} \wedge \neg \text{Cavity})}$$

$$= \frac{0.04}{0.04 + 0.01} = 0.8.$$

(13) $P(AI2) = 0.6$

$P(\text{Study}) = 0.5$

$P(\text{Study} \mid AI2) = 0.8$

$$P(AI2 \mid \text{Study}) = \frac{P(\text{Study} \mid AI2)}{P(\text{Study})} \cdot P(AI2)$$

$$= \frac{0.8}{0.5} \times 0.6 = 0.96$$

◎ 条件付確率とベイズの規則の事例

PCR検査

確率変数 I : Infection (感染)

P : Positive (検査陽性)

⊗ 感染症にかかる確率 $P(I) = 0.01\%$

$= 0.0001$

- 感染したときに検査で陽性になる確率

$$P(P|I) = 0.95$$

- 感染していないのに検査で陽性になる確率

偽陽性 ← $P(P|\neg I) = 0.2$

$$P(\neg P|\neg I) = 1 - P(P|\neg I) = 0.8$$

$$P(I|P) = \frac{P(P|I)}{P(P)} P(I) = \underline{0.00047}$$

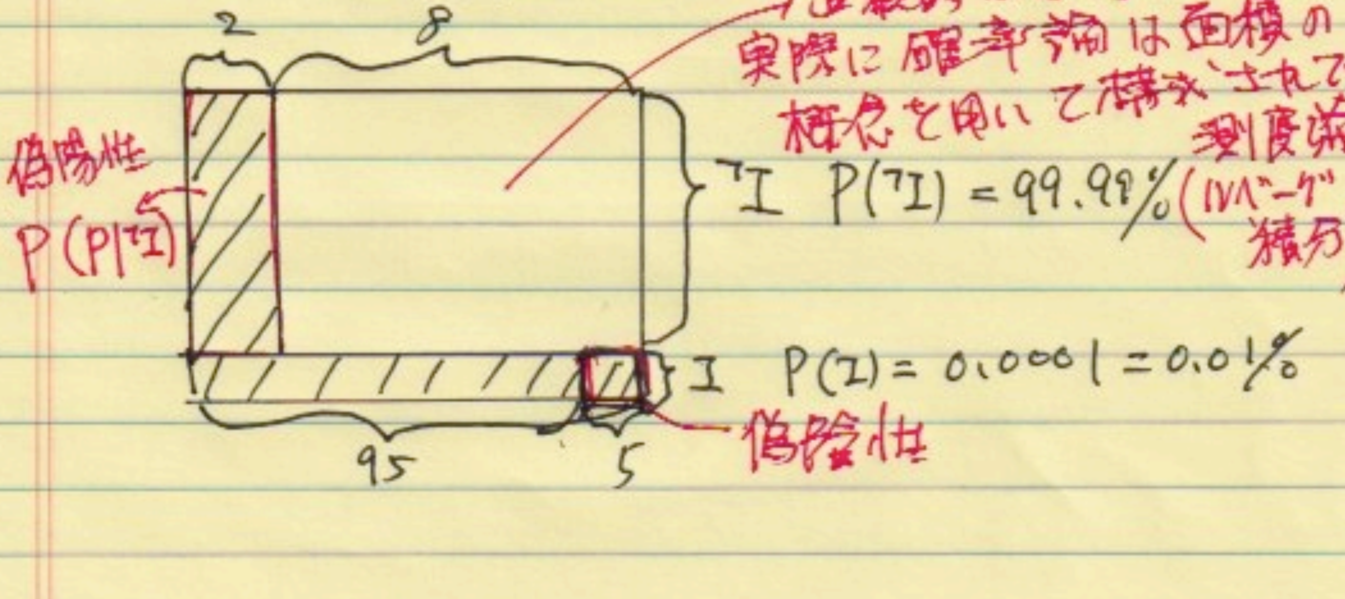
$$P(P) = P(P|I)P(I) + P(P|\neg I)P(\neg I)$$

$$= 0.200075$$

→ 直観的に分かり易い。

実際に確率論は面積の概念を用いて構築されている

測度論



(ルベーグ積分)

② 結合確率と条件付確率の関係（公式）

(i) $P(x_2, x_1) = P(x_2 \mid \overset{\text{given}}{x_1})\, P(x_1)$

$P(x_2 = \text{true} \wedge x_1 = \text{true})$ $\quad \left(P(x_2 \mid x_1) = \dfrac{P(x_2, x_1)}{P(x_1)} \right)$

注意：もしも x_2 と x_1 が独立なら

$$P(x_2, x_1) = P(x_2)\, P(x_1)$$

(ii) $P(x_3, x_2, x_1) = P(x_3 \mid x_2, x_1)\, P(x_2, x_1)$

$$= P(x_3 \mid x_2, x_1)\, P(x_2 \mid x_1)\, P(x_1)$$

一般に

(iii) $P(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1)$

$$= P(x_n \mid x_{n-1}, \cdots x_2, x_1)\, P(x_{n-1}, \cdots x_2, x_1)$$

$$= P(x_n \mid x_{n-1}, \cdots x_2, x_1)\, P(x_{n-1} \mid x_{n-2}, \cdots x_1)\, P(x_{n-2}, \cdots, x_1)$$

$$\vdots$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid x_{i-1}, \cdots, x_1)$$

$$\frac{P(V|U) \quad P(\neg V|U)}{P(V|U)+P(\neg V|U)=1}$$

この関係は分からない

$$\frac{\cancel{P(U|V)} \quad \cancel{P(\neg U|V)}}{}$$

$$\frac{P(V|\neg U) \quad P(\neg V|\neg U)}{P(V|\neg U)+P(\neg V|\neg U)=1}$$

ベイズの規則

$$P(U|V) = \frac{P(V|U)P(U)}{P(V)} \quad \cdots ①$$

$$P(\neg U|V) = \frac{P(V|\neg U)P(\neg U)}{P(V)} \quad \cdots ②$$

①と②を辺々加える

$$P(U|V)+P(\neg U|V) = \frac{P(V|U)P(U)+P(V|\neg U)P(\neg U)}{P(V)}$$

$$1 = \frac{P(V|U)P(U)+P(V|\neg U)P(\neg U)}{P(V)}$$

$$P(V) = P(V|U)P(U)+P(V|\neg U)P(\neg U)$$

$$U \to V$$

P(V)を求めるのに、どの確率が必要なのか?

$$C \to I \to S$$

C: Cause 原因

I: Infection 感染

S: Syndrome 症状