公立はこだて未来大学 2014 年度 システム情報科学実習
グループ報告書

Future University Hakodate 2014 System Information Science Practice
Group Report

プロジェクト名

複雑系の数理とシミュレーション

Project Name

Mathematical analysis and simulation

グループ名

Group Name

プロジェクト番号/Project No.

3-A

プロジェクトリーダ/Project Leader

1012160　畑中汐魚　Shiona Hatanaka

グループリーダ/Group Leader

1012208　村田佳紀　Yoshiki Murata

グループメンバ/Group Member

1012160	畑中汐魚	Shiona Hatanaka
1012208	村田佳紀	Yoshiki Murata
1012237	砂子澤匠	Takumi Sunakozawa
1012117	中原紫雲	Shiun Nakahara

指導教員

川越敏司　川口聡　斉藤朝輝

Advisor

Toshiji Kawagoei　Satoshi Kawaguchi　Asaki Saito

提出日

2015 年 1 月 14 日

Date of Submission

January 14, 2015

概要

本プロジェクトでは、複雑系を理解する手がかりとして、ソリトン現象を取り上げる。この現象を非線形偏微分方程式、流体力学、数値解析またモデル化などの観点から解析し、その結果を視覚化するシミュレーションツールを作成する。前期には、水面波における流体力学の基礎的知識を学ぶため、参考書「非線形波動とソリトン」の輪読を行い、1-ソリトン解の導出の導出を達成した。また、参考書「3 開かれた数学 箱玉系の数理」を用いて、箱玉系セルオートマトンのモデル化を行った。後期には、2-ソリトン解の導出と数値解析を行い、またソリトン波の追い越し運動のシミュレーションを行った。

キーワード　ソリトン現象, ソリトンの波の追い越し, シミュレーション, ソリトン解, 箱玉系セルオートマトン

（※文責: 村田佳紀）

Abstract

We take up soliton phenomenon to understand complex system. We make a simulation tool for visualizing soliton phenomenon by perspective of non-linear partial differential equations, fluid dynamics, numerical analysis, and modeling. We read a reference book to learn basic knowledge of fluid dynamics in water surface wave in the previous semester. Also, we derived one - soliton solution and we simulated soliton phenomenon by box ball system cellular automata. We derived 2 - soliton solution and simulated overtaking movement of soliton wave in the last semester.

キーワード soliton phenomenon, overtaking movement of soliton wave, simulation, soliton solution, box ball system cellular automata

（※文責: Yoshiki Murata）

目次

第 1 章　背景

本プロジェクトでは複雑系を理解する手がかりとして非線形偏微分方程式である KdV 方程式から導かれるソリトン現象の可視化を目的としている。具体的にはソリトン波の形状と位相速度の不変性である。最終的にはソリトン波の追い越し運動の可視化を行い、ソリトン波同士の衝突前後にソリトン波の形状と位相速度が不変であることを可視化することを目標としている。シミュレーションツールには Java、プロットツールには gnuplot を用いる。前年度本プロジェクトではカルマン渦を取り上げ、乱流や層流の流れの場といった、流体力学やベクトル解析の観点から解析し、最終目標のカルマン渦のシミュレーションを達成することができなかった。今年度はソリトン現象を取り上げ、非線形偏微分方程式の解析、浅水面における流体力学また箱玉系セルオートマトンを用いたモデル化といった観点から現象を解析するため、前年度のシミュレーションツールは参考しにくい面が多い。

（※文責: 村田佳紀）

1.1　前年度の成果

前年度の本プロジェクトではカルマン渦について行っていた。バーガース方程式の数値解析を行い、そのシミュレーションを行うところまで達成できた。前年度は時間成分のない動座標系のみのシミュレーションとなった。

（※文責: 砂子澤匠）

1.2　現状における問題点

前年度の本プロジェクトで行われた内容がカルマン渦であり、今回の内容は浅い水面波における流体力学であるため、前年度の数値解析が参考にしにくい面がある。さらに、前年度は時間成分のない動座標系のみのシミュレーションだったため、複雑系を理解する手がかりとして十分ではないシミュレーションツールとなってしまっていた。また、前年度の本プロジェクトでは可視化を行うシミュレーションツールの作成が最終目標となってしまっていたため、プロジェクト学習で必要となる社会的実現性に乏しい成果物となってしまっていた問題がある。他にも、本プロジェクトでシミュレーションを行う前に本学では線形の微分方程式を解くという講義はあるが、非線形微分方程式を学ぶ講義や流体力学を学ぶ講義がない。また、解析学ではヤコビアン行列なども扱っていない。そのため、非線形偏微分方程式を解く知識や、物理的考察力が欠落している問題があり、流体力学の基礎的知識を 1 から学ばなければ、問題解決とならないという問題がある。さらに、可視化できるプログラミングツールが C 言語では OS 間の汎用性がないという問題点がある。

（※文責: 砂子澤匠）

1.3 課題の概要

本プロジェクトの目的であるソリトン現象の可視化を行うために、浅い水面波における流体力学及び非線形偏微分方程式を解くための基礎知識が必要である。また、ソリトン現象について理解をする、モデル化を行うシミュレーションツールが必要である。他にも、前年度の問題点から、社会的実現性のあるシミュレーションツールの作成が必要であり、本年度はシミュレーションツールを用いた複雑系理解の有効性を立証する必要がある。

（※文責: 村田佳紀）

第 2 章　到達目標

非線形偏微分方程式である KdV 方程式の解析から、初期条件を与えられた、KdV 方程式の一般解であるソリトン解を導くことであり、また、一つの初期条件における 1-ソリトン解及び一般化された N-ソリトン解の導出から、ソリトン波の特徴やソリトン波同士の衝突後の形状と位相速度の不変性の解析を行うことである。そして、到達目標は解析によって得られたソリトン解を元にソリトン現象の可視化を行うことである。

（※文責: 村田佳紀）

2.1　本プロジェクトにおける目的

本プロジェクトでは複雑系を理解する手がかりとなるよう非線形微分方程式を解き、高校生レベルの知識でも理解できるようにシミュレーションを用いて可視化を行い簡略化すること。

（※文責: 砂子澤匠）

2.1.1　通常の授業ではなく、プロジェクト学習で行う利点

プロジェクト学習により本プロジェクトを行うことで複雑系の主となる非線形微分方程式という一見難しく感じるであろう問題について、数学を主としている複雑系コースだけでなくシステム系を多く扱っている知能システムコースのメンバーの能力が混ざり合うことにより短所を補い長所を生かし、簡略化することができる。また、難しい問題に対する取り組みをグループで取り扱うことにより、様々な観点から解決へ導くことができる。

（※文責: 砂子澤匠）

2.2　具体的な手順・課題設定

1. 前期 : 非線形波動とソリトン (著 戸田盛和, 2000) を用いて浅水波の基礎知識を学ぶ
   課題 : 浅水波に関係する式の導出と式の意味を理解する。
2. 前期 : ソリトン波とソリトンの波の追い越し現象について情報収集を行う
   課題 : ソリトン波とソリトンの波の追い越し現象について参考書やインターネットを用いて情報収集を行う。
3. 前期 : KdV 方程式から 1-ソリトン解を導出する
   課題 : ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて数値解析を行い、KdV 方程式から 1 ソリトン解の導出を行う。
4. 前期 : 箱玉系セルオートマトンとソリトン現象の関係性を調べる
   課題 : 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて関係性を調べる。

5. 前期：箱玉系セルオートマトンのプログラムを製作する
   課題：ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) の内容からルールを決め、それを基にプログラムを構築していく。
6. 後期：KdV 方程式から 2-ソリトン解を導出する
   課題：ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) および 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010) を用いて数値解析を行い、KdV 方程式から 2-ソリトン解の導出する。
7. 後期：KdV 方程式から N-ソリトン解を導出する
   課題：ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) および 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010) を用いて数値解析を行い、KdV 方程式から N-ソリトン解を導出する。
8. 後期：1-ソリトン解と 2-ソリトン解をプロットで出力する
   課題：形の変わらない波が位相速度を変えずが進行するものと形の変わらない 2 つの波があり、位相速度が速い波が位相速度の遅い波を追い越すものをプロットを用いて表現する。
9. 後期：KdV 方程式の面積保存について解明する
   課題：3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010) を用いて波の積分から面積の保存を導出する。
10. 後期：箱玉系セルオートマトンのルールについて研究を行う
    課題：箱玉系セルオートマトンのルールから箱玉系セルオートマトンの欠点を発見する。
11. 後期：箱玉系セルオートマトンが表現できるソリトン波の追い越し現象の限界を確認する
    課題：箱玉系セルオートマトンを動作させ、その動きから箱玉系セルオートマトンが表現できない部分を発見する。
12. 後期：箱玉系セルオートマトンについてまとめを行う
    課題：箱玉系セルオートマトンについて明確になったところを整理し最終発表で説明できるようにまとめる。
13. 後期：KdV 方程式を基にソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを製作する
    課題：箱玉系セルオートマトンではできなかった衝突の瞬間と追い越しの瞬間を描写できるシミュレータを KdV 方程式と 1-ソリトン解、2-ソリトン解から製作する。
14. 後期：箱玉系セルオートマトンとソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータの特徴を明確にし、比較する
    課題：2 つのシミュレータの特徴から比較を行い、それぞれのメリットとデメリットを明確にする。
15. 後期：シミュレーションツールとソリトン現象の説明の改善
    課題：KdV 方程式の理解を簡易的に行うためシミュレータを用いてソリトン現象のわかりやすい説明を考える。

（※文責: 中原紫雲）

2.3 課題の割り当て

KdV 方程式からソリトン解を導出し、また数値計算の手法を解析する理論班として複雑系コースの村田佳紀、砂子澤匠
シミュレーションツールの実装を行うプログラム班として知能システムコースの畑中汐魚、中原紫雲と 2 つのグループに分けた。

（※文責: 砂子澤匠）

第 3 章　課題解決のプロセスの概要

1. 前期 : 非線形波動とソリトン (著 戸田盛和, 2000) を用いて浅水波の基礎知識を学ぶ
   解決方法 : 毎週水曜日までにページを決めて予習を行い、水曜日に先生のいる前でセミナーを行った。意味を間違って取り入れているところや導出の仕方が分からないところ、式の意味が分からないところなどはこの時間に先生から教えてもらった。
2. 前期 : ソリトン波とソリトンの波の追い越し現象について情報収集を行う
   解決方法 : 各自参考書やインターネットを用いて情報収集を行った。手に入れた情報を LINE や Google Drive などのツールを使って共有して理解を深めた。
3. 前期 : KdV 方程式から 1-ソリトン解を導出する
   解決方法 : ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて数値解析を行い、KdV 方程式から 1-ソリトン解の導出を行った。
4. 前期 : 箱玉系セルオートマトンとソリトン現象の関係性を調べる
   解決方法 : 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を熟読し情報交換を行った。ルールに関係する部分、プログラムの実行と現象の関係についてノートに書き関連性を見つけ出した。
5. 前期 : 箱玉系セルオートマトンのプログラムを製作する
   解決方法 : 関連する部分を抜き出したノートを基にルールを作成した。また 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) に書かれているルールを適用しプログラムを作成していった。失敗したときには何がいけないのかを探し出し、ノートに書き出して改善を試みた。
6. 後期 : KdV 方程式から 2 ソリトン解を導出する
   解決方法 : ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) および 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010) を用いて数値解析を行い、現在求めている 1-ソリトン解を基に 2-ソリトン解を導出した。
7. 後期 : KdV 方程式から N-ソリトン解を導出する
   解決方法 : 1-ソリトン解と 2-ソリトン解を導出した後、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて N-ソリトン解の導出を試みた。
8. 後期 : 1-ソリトン解と 2-ソリトン解をプロットで出力する
   解決方法 : gnuplot を用いて 1-ソリトン解と 2-ソリトン解に初期値を与えてグラフで表示させた。
9. 後期 : KdV 方程式の面積保存について解明する
   解決方法 : 波の面積を求めるために積分を行い、衝突前と衝突時の面積が同じになることを証明した。
10. 後期 : 箱玉系セルオートマトンのルールについて研究を行う
    解決方法 : 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010) を読み、このルールが定められている理由を解明した。
11. 後期 : 箱玉系セルオートマトンが表現できるソリトン波の追い越し現象の限界を確認する
    解決方法 : 色々なパターンの玉の列をランダムに生成し配置した。プログラムを実行し追い

越しができない時を確認し、理由を解明した。

12. 後期：箱玉系セルオートマトンについてまとめを行う
 解決方法：今までわかってきたことをノートに書き出し箱玉系セルオートマトンを完全に理解した。
13. 後期：KdV 方程式を基にソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを製作する
 解決方法：1-ソリトン解、2-ソリトン解と三階偏微分方程式に前方差分法を適用したものをプログラム化し衝突前後と衝突の瞬間、追い越しの瞬間を描写できるシミュレータを製作した。
14. 後期：箱玉系セルオートマトンとソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータの特徴を明確にし、比較する
 解決方法：箱玉系セルオートマトンとソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを同時に動かしそれぞれの違いを発見した。またこれらの動きから特徴を発見しノートにまとめた。
15. 後期：シミュレーションツールとソリトン現象の説明の改善
 解決方法：ソリトン現象やシミュレーションツールの動作、仕組みについて聞いただけでわかるように説明を簡易化するため話し合いを行って説明を決定した。

前期は 4 から 5 月まで参考書である非線形波動とソリトン (著 戸田盛和, 2000) を用いて、浅水波の基礎的知識を学んだ。6 月から 7 月は理論班とプログラム班にわかれ活動を行った。理論班は KdV 方程式から 1-ソリトン解の導出を行い、ソリトン波の特徴を理解した。プログラム班は 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて、箱玉系セルオートマトンを用いたソリトン現象のモデル化を行った。

後期は理論班は 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて前期に導出した 1-ソリトン解を基に 2-ソリトン解を導出した。N-ソリトン解までの導出を試みたが手計算では複雑化し難しいため導出には至らなかった。他には KdV 方程式の保存量について研究した。箱玉系セルオートマトンを解明するため面積保存を解明した。プログラム班は箱玉系セルオートマトンの表現の限界を発見し、まとめた。またソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを方程式から Java 言語を用いて製作した。

（※文責: 中原紫雲）

第 4 章　課題解決のプロセスの詳細

4.1　各班の課題の概要とプロジェクト内における位置づけ

理論班・・・KdV 方程式からソリトン波についての様々な式の導出及び初期条件を与えた上での数値解析を行う。また、偏微分方程式のシミュレーションにおける解析方法を調べる。
プログラム班・・・理論班が導き出した式をもとにソリトン波の追い越しを表現できるシミュレータを作成し、ソリトン現象のモデル化を行う。

（※文責: 中原紫雲）

4.2　担当課題解決過程の詳細

4.2.1　理論班

1-ソリトン解　1-ソリトン解は以下の導出方法によって導かれる。KdV 方程式は振幅 $u = u(x,t)$ とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1.1)$$

で表される。位相速度 c で形を変えずに前方に伝わる波は、
一変数関数 f を用いて、$u(x,t) = f(x - ct)$ と表せる。$\xi\ = x - ct$ として (1.1) 式に代入すると、

$$-cf' + 6ff' + f''' = 0 \quad (1.2)$$

を得る。つまり、

$$-cf' + 3f^2 + f'' = \text{定数} \quad (1.3)$$

となる。(1.3) に f' をかけて境界条件を考え、積分すると、

$$-\frac{c}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = 0 \quad (1.4)$$

を得る。$f(\,\xi\,) = \frac{c}{2}y(\,\eta\,)$，$\eta\ := \frac{\sqrt{c}}{2}\,\xi$ とおくと

$$-y^2 + y^3 + \frac{1}{4}(y')^2 = 0 \quad (1.5)$$

を得る。また、$\frac{1}{y(\,\eta\,)} = z(\,\eta\,)^2$ とおくと

$$z' = \pm\sqrt{(}z^2 - 1) \quad (1.6)$$

となり、(1.6) から β を任意定数とすると、

$$z(\,\eta\,) = \pm cosh(\,\eta\ +\ \beta\,) \quad (1.7)$$

となる。以上から、ソリトンの初期位相を θ ($\theta = -\frac{2\ \beta}{\sqrt{c}}$) とし, $sechx = \frac{2}{e^x+e^-x}$ とすると、

$$u(x,t) = \frac{c}{2} sech^2[frac\sqrt{c}2(x - ct - \ \theta\ )]; \quad (1.8)$$

となり、この (1.8) 式が KdV 方程式 (1.1) 式のソリトン解であり、1-ソリトン解とよばれる。この 1-ソリトン解の導出により初期位相 c が振幅 $u = u(x,t)$ に比例する特徴をもつ式となる式ことが示される。解析解として c=4、β =0 としたとき、

$$u(x,t) = 2sech^2(x - 4t) \quad (1.9)$$

を得る。

（※文責: 村田佳紀）

2-ソリトン解　2-ソリトン解は以下の導出方法によって導かれる。

$$\tau 2(x,t) = 1 + e^{\eta 1} + e^{\eta 2} + A12 \times e^{\eta 1 + \eta 2} \quad (2.1)$$

とおく。p1、p2 を相異なる整数とし、

$$\eta i = pi \times x - pi^3 \times t \quad (2.2)$$

及び

$$A12 = (\frac{p1 - p2}{p1 + p2})^2 \quad (2.3)$$

とする。（2.1）式〜（2.3）式より

$$u(x,t) = 2\frac{\partial^2 \log(\tau(x,t))}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

が得られる（2.4）式は KdV 方程式（1.1）式をのソリトン解となり、2-ソリトン解と呼ばれる。(1.8) 式及び (2.4) 式から、$c1 = 6, c2 = 12$, $\beta\ = 0$ とした解析解として

$$u(x,t) = 12\frac{3 + 4\cosh 2(x - 4t) + \cosh 4(x - 16t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh 3(x - 12t))^2} \quad (2.5)$$

が得られる。

（※文責: 村田佳紀）

保存量　ソリトン現象の特徴として保存量の存在が知られている。また、KdV 方程式の保存量は無限個存在することが知られている。例として、時間発展保存や、面積保存などといったものがある。今回、本プロジェクトではソリトン現象の面積保存と時間発展保存について解析した。$t = 0.0$ では波が衝突しているため、1 つの波束の面積として導出すればよい。ここで (2.5) 式の $t = 0.0$ における $u(x,t)$ を $P(x)$ とする。

$$\int_{-5}^{5} P(x)dx \quad (3.1)$$

また、$t = 1.0$ では波が衝突後であるため、2 つの波束それぞれの面積を導出する必要がある。ここで (2.5) 式の $t = 1.0$ における $u(x,t)$ を $Q(x)$ とする。

$$\int_{0}^{20} Q(x)dx \quad (3.2)$$

（3.1）式の面積と (3.2) 式の二つの波束に対する面積が等しくなることがわかった。そのため面積が保存されていることが示された。

また、いくつ波束が存在しても $t >>>> 1$ とすれば必ず大きい振幅の順に波束が並ぶという観点から時間発展的にも保存されていることがわかる。

（※文責: 砂子澤匠）

差分法　差分法とは微分方程式を差分方程式に置き換えて解く手法のことである。微分方程式に対応する差分方程式は微分方程式に含まれる微分商を差分商に置き換える差分近似を行うことにより、機械的に作ることができる。そこでまずは微分商に置き換える方法について述べる。1 階導関数を差分近似するには、

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \qquad (4.1)$$

から、$h <<< 1$ とし、

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \qquad (4.1)$$

とする。これは、点 P での曲線の接線の傾きを、直線 PQ の傾きで近似していることに対応している。ただし Q は P から x 方向に h だけ離れた曲線上の点であるとする。別の方法として、テイラー展開によれば $h <<< 1$ として

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (4.2)$$

となる。これを u' について解くことにより、

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + O(h)$$

となる。ただし O(h) はこの場合

$$h(\frac{u''}{2!} + \frac{u'''}{3!}h + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

であり、h が小さなとき、h 程度の大きさの量であることを示している。この式の O(h) の項を h が十分小さなものと無視すれば (4.1) 式が導出される。一方で、同様に

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (4.3)$$

を u について解けば

$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h} + O(h)$$

となる。従って一階導関数は

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \qquad (4.4)$$

と近似することもできる。さらに (4.2) 式から (4.3) 式を引いた式を u' について解くと

$$u' = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

となるため、次の近似式も得られる。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \qquad (4.5)$$

(4.1)、(4.4)、(4.5) はそれぞれ前進差分、後退差分、中心差分と呼ばれる。誤差（近似のとき無視した項）は中心差分が $O(h^2)$ となり、他は O(h) であるため、h が十分小さな時これらの中では中心差分がもっとも精度が良いとされている。本プロジェクトにおいては、前進差分を用いて KdV 方程式を計算した。

（※文責: 砂子澤匠）

4.2.2 プログラム班

4 月 目標として Processing を用いて波についてシミュレーションを行うことを決定した。波について知るために非線形波動とソリトン (著 戸田盛和, 2000) を用いて式の導出を行った。

5 月 引き続き波に関係する式の導出を行った。同時にソリトンの波の追い越し現象についての情報収集を行った。

6 月 ヤコビヤン行列、トロコイドについて理解した。教科書が 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著 時弘哲治, 2010) に代わり箱玉系セルオートマトンによってソリトンの波の追い越し現象をモデル化することに決定した。

7 月 ソリトンの波の追い越し現象についてモデル化を行うため箱玉系セルオートマトンのプログラムを製作した。中間発表では箱玉系セルオートマトンを実際に作動させ、ソリトンの波の追い越し現象について視覚化した。

9 月 ソリトン波の追い越しと衝突の瞬間を動画を持って観察した。またソリトン波を適切に表現できるシミュレータを作成するためプログラムの勉強を行った。

10 月 箱玉系セルオートマトンの正しいルールとソリトン波の追い越しの表現の限界について明らかにした。中間発表までに製作したものはソリトン波の追い越しを適切に表現できていなかったことが分かった。

11 月 試行錯誤した結果、Java 言語によってソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを製作した。三階偏微分方程式に前方差分法を適用し、波形を表現した。

12 月 最終発表に向けてシミュレータの最終調整を行い発表に適切な設定に変更した。最終発表ではソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを作動させ、ソリトン波の追い越しを説明した。

前期ではソリトンの波の追い越し現象をモデル化した。難しい非線形偏微分方程式を可視化するために箱玉系セルオートマトンを Processing 言語を用いて製作した。ソリトンの波の追い越しは追い越し前後で波の高さは崩れずに位相がずれるという現象である。このソリトンセルオートマトンはソリトンの波の追い越し現象について白枠と黒玉で表した。波の高さは玉のつながりで表した。連なりが長いほど高い波であることを示している。

まず製作するに当たり 4 つのルールを決めた。

ルール 1　いくつかの連なる箱の中に 3 つ玉を置くことが出来る。このとき、玉を 2 つ連ねて置いてよい。

ルール 2　1 ステップで x 個の玉を左側の玉から元あった場所の右隣の箱に移す。

ルール 3　選んだ先の箱にすでに玉が置かれている時、その右隣に玉を置く。

ルール 4　1 番右の箱に玉がある時その玉の次の動く先は 1 番左の箱となる。つまりループを行う。

これによって、玉の連なりが多いほうが早く動くように見える。また玉の列が追い越しをするときは形が崩れずに追い越しをする。こうしてソリトンの波の追い越し現象を表現した。

後期では箱玉系セルオートマトンの表現の限界を明確にした。次に Java 言語に前方差分法を適用した三階偏微分方程式を使用してソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを製作した。また、これらシミュレータの比較を行った。箱玉系セルオートマトンではソリトン波の追い越しを適切に表現できないことを明確にしルールを改定した。衝突の瞬間と追い越しの瞬間を表現できないため疎密波としての表現しかできていないことも明らかとなった。一方、Java 言語で製作したシミュレータは追い越しと衝突の瞬間を描写できるものとなった。また三個までのソリトン波を描写し、追い越しをシミュレートすることが可能である。

箱玉系セルオートマトンの新しいルール

ルール 1　玉の連なりの玉の個数以上の空き箱を左隣にある連なりからあけて配置する。

ルール 2　最も左にある玉を右側に存在する最も近い空き箱に移動させる。

ルール 3　全ての玉を一回ずつ動かした時点で 1 ステップが終了するものとする。

ルール 4　N ステップ繰り返すことによって玉の連なりが長い組が最も右にくる。スケールの問題によって右端は左端とつながっており箱の列は無限に並んでいると仮定する。

ソリトン波の追い越し前と追い越し後は適切に表現できるが、追い越しの瞬間と衝突の瞬間は表現することができない。また、本来ソリトン波の追い越しは振幅の大きい波が隣同士に存在していても問題なく追い越しをするのだが箱玉系セルオートマトンのルール上不可能となっている。したがって、玉のある場所が密、空き箱が疎となっており、疎密波の表現しかできていない。

（※文責: 中原紫雲）

4.3　担当課題と他の課題の連携内容

4.3.1　理論班

理論班がプログラム班のシミュレーションツール作成に必要な初期条件を与えた数値解析を行う。

（※文責: 村田佳紀）

4.3.2 プログラム班

4 月から 6 月までは理論班とともに非線形波動とソリトン (著 戸田盛和, 2000) を用いて数値解析を行い、波の基礎について学んだ。理解に困難を極めた部分は理論班から丁寧に教えてもらった。7 月から 3 開かれた数学 箱玉系の数理 (著　時弘哲治, 2010)、ソリトンがひらく新しい数学 (著　上野喜三雄, 1993) を用いて理論班の導き出した KdV 方程式や 1-ソリトン解の特徴を基に箱玉系セルオートマトンのプログラムの製作した。プログラムの仕様を理論班とともに確認し、ソリトン波の追い越しができているか検証した。同時に製作に関して意見交換をし、アドバイスをもらった。中間発表において発表する内容について話し合いを行い確認をした。また最終調整において発表時のプログラム実行画面のサイズ調整などを話し合った。

後期は箱玉系セルオートマトンが表現できない部分を明確化するために理論班が解明した KdV 方程式の面積保存を活用した。この際、理論班に面積保存について詳しい説明をいただいた。ソリトン波の追い越しを適切に表現できるシミュレータを製作するため三階偏微分方程式に差分法を活用した。理論班に数値解析を手伝ってもらった。また 1-ソリトン解、2-ソリトン解、KdV 方程式に関する情報を共有し、シミュレータ製作に役立てた。完成したシミュレータが正しい動きをしているか確認するためシミュレータの波を使って面積保存をしているか確認してもらった。最終発表では理論班と協力して質疑応答を行った。

（※文責: 中原紫雲）

第 5 章　結果

5.1　プロジェクトの結果

前項に書いた通り、4 月から 6 月にかけて理論班とプログラミング班は合同で数値解析・波の基礎を学び、複雑系とは何か、またどのようにして可視化をするかを考察した。その後 7 月は箱玉系セルオートマトンの勉強を行い、プログラミング班は Processing を用いてプログラムを作り、視覚的な立場から複雑系の理解を深めた。理論班は引き続き非線形微分方程式に関連する勉強をして、数理的な立場から複雑系の理解を深めた。また、1 個の孤立波を表す KdV 方程式の 1-ソリトン解を求める式の証明を行うまでに至った。また、中間発表を行うためにスライドやポスターをプログラミング班・理論班合同で製作した。そして中間発表までに箱玉系セルオートマトンでソリトン現象を可視化することが出来たので箱玉系セルオートマトンについて中間発表を製作したスライドとポスターを用いて行い、複雑系を理解してもらおうと試みた。しかし箱玉系セルオートマトンでは後述の通り不備があり正確なソリトン現象を可視化することが出来ないことが判明したため、中間発表後からはプログラミング班は Java を用いて二次元の波のシミュレータの作成を行うことにした。理論班は引き続き中間発表までに出来た 1 個の孤立波を表す KdV 方程式の 1-ソリトン解を求める式の証明から発展した 2 個の孤立波を表す KdV 方程式の 2-ソリトン解、そしてそこから更に発展した n 個の孤立波を表す KdV 方程式の n-ソリトン解の数式証明を行っていった。また、その結果をプロットして理論班もソリトン現象の可視化を試みた。10 月から 12 月はプログラミング班と理論班はほぼ完全に分かれ、それぞれの作業に従事した。1 月の前半は最終発表に向けてプログラミング・スライド・ポスターを手直しした。そして最終発表を行い、人々へ非線形微分方程式とは、そして複雑系とはどのようなものかを可視化して発表することとした。ただ、発表は比較的スムーズに出来て発表を聞いた人から評価や意見をいただけたものの、後述するように本プロジェクトの本質を発表を聞いていた人に伝えることは出来たのだろうかと考える結果となった。

（※文責: 畑中汐魚）

5.2　成果の評価

プロジェクト開始当初から中間発表までに理論班は 1-ソリトン解を求めることは出来た。また、プログラミング班は箱玉系セルオートマトンの製作をすることが出来た。しかし、箱玉系セルオートマトンではソリトン現象の表現を適切に表現することが出来ないことが判明した。理由としては箱玉系セルオートマトンでは縦波と横波の二波を適切に表現することが出来ないからである。よって、プログラミング班は Java を用いて二次元の波のシミュレータを作成することにより当問題を解決することが出来た。二次元の波のシミュレータに関しては最終発表段階では 3 個の孤立波の追い抜き、つまり KdV 方程式の 3-ソリトン解までの表現しか出来ない仕組みになっているが、これはプログラム内の数値を変えることにより解決でき、n 個の孤立波の追い抜き、つまり KdV 方程式の n-ソリトン解を可視化することが出来る。一方、理論班は手計算で KdV 方程式の 3-ソリトン解以上を求めることは出来ず、KdV 方程式の 1-ソリトン解と 2-ソリトン解を求め、それらをプロットしたものを完成させるまでにしか至らなかった。しかし、昨年の本プロジェクトの課題で

あったカルマン渦の研究と比較すると、昨年は研究に行き詰まりシミュレータもほとんど完成していなかったようだが今年の本プロジェクトはそれに比べたら最終段階までには至らなかったものの経過段階までのシミュレータは完成して可視化することが出来たので人数や班員の学力を考慮したとすると比較的健闘できたのではないだろうかと思う。また、中間発表・最終発表ともに終わった後に聴衆からいただいたアンケートを見ると「少ない人数で頑張っていた」「複雑系のことが感覚的にわかった」などプラスの評価をもらえた。その反面、「このプロジェクトは何をしたかったのか」「この研究はどのように役に立つのか」などという意見もいただいたので本プロジェクトの本質を発表を聞いていた人に伝えることは出来たのだろうかとも考える。

（※文責: 畑中汐魚）

5.3 担当分担課題の評価

5.3.1 理論班

初めのころは水面波における流体力学から KdV 方程式の導出及びソリトン解の解析までを目標としていたが進行状況を考慮し、KdV 方程式が与えられているものとし、ソリトン解の導出を行った。現在までに 1-ソリトン解及び 2-ソリトン解の導出を行い、ソリトン波の特徴である位相速度が振幅に比例し、横幅は位相速度がおおきくなれば横幅の狭い波となるということがわかった。当初の目標であった N-ソリトン解の導出から導かれるソリトン波同士の衝突時及び衝突後のソリトン波の特徴を導くところまではいたらなかった。また、保存量の導出から面積保存及び時間発展保存が KdV 方程式に存在することが分かった。他にも、理論班では KdV 方程式からシミュレーションツールを作成するための差分法の研究を行った。最後に複雑系理解の有効性を示す理解度アンケートなどを実施できなかった。

（※文責: 村田佳紀）

5.3.2 プログラミング班

プログラミング班は、理論班の数値解析の導出結果を元に Processing を基盤に箱玉系セルオートマトンのプログラムを作成した。ただしかし完璧な物ではなく、本来なら 30 個の箱の中に任意の数の玉を置けるべきなのだが 3 つの玉を置くのが限界であった。また、箱玉系セルオートマトンのプログラムを製作していった際、箱玉系の構造上の問題でソリトン波の実現には至らないことが判明した。具体的な理由としては前項の通り箱玉系セルオートマトンでは縦波の表現しかできず、実際のソリトン現象で起こっている縦波と横波の二波の表現が出来ないからである。そのため、Processing から Java に切り替えて新しく二次元の波のシミュレータを製作した。経緯としては、当初は Processing と Java の二つの言語のそれぞれでプログラムを作る予定だったが、Processing のプログラムの方で適切なプログラムを完成することが出来なかったため、Processing でのプログラミングを諦めて Java でのプログラミングを始めることにした。そして理論班が完成させた KdV 方程式の 1-ソリトン解と 2-ソリトン解の結果を gnuplot を用いてプロットして完成したソリトン現象を可視化できるものと照らし合わせて、二次元の波のシミュレータが不備のないシミュレータであることを実証することが出来た。しかし、三次元の立体的なシミュレータを作成することは時間と学力の都合上完成するまでに至らなかった。

（※文責: 畑中汐魚）

第 6 章　今後の課題と展望

中間発表が終わり最終発表までの課題と展望としては、期限に余裕を持って作業することを第一にプログラミング班が前期で製作した箱玉系セルオートマトンの振る舞いと、理論班が前期で学び引き続き一般解を導いていく KdV ソリトンの振る舞いについて比較して類似点と相違点を列挙していくことであった。具体的な例としては 2 波の衝突の瞬間についての比較やスピードの相違点などが挙げられた。しかし、研究を進めていくうちに箱玉系セルオートマトンでソリトン現象の表現をすることは不可能と判断した。この点を踏まえ最終発表が終わり、今後の課題・展望としては理論班は n-ソリトン解の導出と初期値問題の解決を行うこと、プログラミング班は二次元の波のシミュレータを元に立体のシミュレータを作成すること、全体としては人々に複雑系というものはどのようなものなのかを分かってもらい、それがどのような場面で活躍しているのかを分かってもらいそこから想像してもらうことが挙げられる。また本プロジェクトの課題としては、期日前に焦って作品を完成させたり人数は少なかったものの一丸となって一つの物事に取り組みすぎて遠回りをすることがあったので、時間を多くとって課題に取り組むことと一つではなく様々な視点から問題に取り組むことが挙げられる。

（※文責: 畑中汐魚）

付録 A　活用した講義

1 年次前期全コース受講『情報表現入門』で箱玉系セルオートマトンに必要な Processing の知識を学び、これを活用した。また、数式を解く上で微分方程式が多く出てきたが、これらは 2 年次後期知能システムコース受講『微分方程式』及び 2 年次後期複雑系コース受講『システムと微分方程式』で学んだことを活かした。さらに、Processing だけで本プロジェクトを進めていくのは不可能と判断したため Java を用いた。これは 2 年次前期知能システムコース受講『情報処理演習⊠』において学んだ。

（※文責: 畑中汐魚）

付録 B　その他製作物

/*　その他成果物をプロジェクトの担当教員の指示に従って添付する。 */

参考文献

[1] 戸田盛和. 非線形波動とソリトン. 日本評論社, 2000.

[2] 時弘哲治. 3 開かれた数学 箱玉系の数理. 朝倉書店, 2010.

[3] 上野喜三雄. ソリトンがひらく新しい数学. 岩波書店, 1993.

（※文責: 畑中汐魚）