

# 複雑系の数理とシミュレーション

## Mathematical analysis and simulation

b1012160 畑中汐魚 Shiona Hatanaka

### 1 背景

本プロジェクトの目標は、複雑系とは何かを勉強し理解して、その分野に関連した式や現象等を可視化することにより少しでも多くの複雑系の仕事や研究に関わる人々の足がかりとなるようなものを作り上げるというものであった。今回、本プロジェクトで取り扱ったものはソリトン波の追い越し現象である。ソリトン波は普通の波とは違い、互いの波の衝撃の力に干渉することなく2つの波の個々の力をそのまま保って動く波の事である。具体的な例としては浅水波や木星の黒点の移動などが挙げられる。本プロジェクトでソリトン波の追い越し現象を取り上げた理由としては、ソリトン波は複雑系でよく用いられる非線形微分方程式で構成されているためこれを可視化することにより一般向けに非線形微分方程式を理解しやすくなりまた広義的に複雑系とは何かというものを理解しやすくなるだろうと考えたからである。今回は非線形微分方程式の中でも KdV 方程式を中心とした数式を解いて、その結果を当てはめて gnuplot をいうプロットツールを用いて出力して孤立波の動きを数学的な立場から可視化する理論班とその解かれた数式をプログラミングにコーディングしてモデリング製作を行いソリトン現象をプログラミング可視化するプログラミング班に分かれて作業を行い、それぞれの班が作り上げたものを照らし合わせてお互いに不備や矛盾がないかを確認し合い本問題に取り組んだ。

### 2 課題の設定と到達目標

本プロジェクトの到達目標としては、複雑系で用いられる式や現象等を分かりやすく可視化して少しでも多くの複雑系の仕事や研究に関わる人々の足がかりを作ることが挙げられた。どちらかという一般向けというよりは研究者向けの立場として本プロジェクトを進めていくこととした。具体的には、プログラミング班は初期段階では Processing を、経過段階で Java を用いてソリトン

波の追い越し現象を可視化することにした。また、理論班は1個の孤立波を表す KdV 方程式である 1-ソリトン解の導出および2個の孤立波を表す KdV 方程式である 2-ソリトン解の導出を手始めに行いそれをプロットツールのひとつである gnuplot を用いて導出したソリトン解をプロットして数学的な面から可視化することとした。最終的な目標はプログラミング班は平面上の波のシミュレーターを作成した後、それを3次元に置き換えた 3D のシミュレーターの製作を、理論班は  $n$  個の孤立波を表す KdV 方程式である  $n$ -ソリトン解の導出と初期値問題の解明をすることとした。

### 3 課題解決のプロセスとその結果

まず、本プロジェクトを進めていく上での問題点として、流体力学の基礎的知識を1から学ばなければ問題解決とならないという問題があることと、可視化できるプログラミングツールが C 言語では OS 間の汎用性がないという問題点がある。そのため、プログラミング班はまず始めに、箱玉系セルオートマトンというものを Processing を用いて製作した。箱玉系セルオートマトンとはその名の通り、箱と玉の二つの値を用いて波の追い越しをモデリングするものである。しかし、箱玉系セルオートマトンはソリトン波の追い越しの特徴である、追い越しの前後でぶつかり合った波の形が変わらないという条件に矛盾してしまうため Java を用いて新しい平面上でのシミュレーターを製作した。また、位相速度を変更するコンテンツを製作したことにより波の高さや速度などを変更することが出来るようになり、より詳細なソリトン波の追い越しを可視化することが出来た。理論班は数値解析と KdV 方程式について勉強し、最終的にその成果とプロットすることに成功した。しかし、昨年の本プロジェクトの課題はカルマン渦であることに対して今年の本プロジェクトの課題は浅い水面波における流体力学であり、概要は同じ数値解析から始まるもののその

数値解析の詳細は別物であるため昨年の本プロジェクトを参考にすることができず、さらに本プロジェクトを進めていく上で必要不可欠となった非線形微分方程式や流体力学、ヤコビヤン行列などは班員全員が今までに学んだことのない分野であったためその勉強について莫大な時間が必要となった。また、本プロジェクトの主題である非線形微分方程式というものだけの観点で流体力学の問題を解決をしようとしていて、一般的な初期値問題とは何かなどを調べるまでに行き着かなかったからではないかと考える。そのためプログラミング班は3次元のシミュレータを製作するまでには至らず、理論班は1個の孤立波を表す KdV 方程式である 1-ソリトン解及び2個の孤立波を表す KdV 方程式である 2-ソリトン解の導出手計算で行いそれをプロットしたことにより数学的な視点からソリトン現象を可視化するものを作成することが出来たものの n 個の孤立波を表す KdV 方程式である n-ソリトン解の導出をすることとそれにおける初期値問題の解決までには至らなかった。しかし昨年の本プロジェクトの課題であったカルマン渦の研究と比較すると、昨年は研究に行き詰まりシミュレータもほとんど完成していなかったようだが今年の本プロジェクトはそれに比べたら最終段階までには至らなかったものの経過段階までのシミュレータは完成して可視化することが出来たので人数や班員の学力を考慮したとすると比較的健闘できたのではないだろうかと思う。また、発表後のアンケートを見ると「少ない人数で頑張っていた」「複雑系のことが感覚的にわかった」「このプロジェクトは何をしたかったのか」などというコメントをいただくことが出来た。ここから考えられることは、4人という少ない班員で本プロジェクトに懸命に取り組みそれなりに頑張り研究をしたもの本プロジェクトの本質を発表を聞いていた人に伝えることは出来たのだろうかということである。

#### 4 今後の課題

今回は3個の孤立波を表す KdV 方程式の 3-ソリトン解までの平面上でのシミュレータを製作した。また、これはプログラムの数値を変える事により n 個の孤立波を表す KdV 方程式の n-ソリトン解のシミュレータに変更することが出来る。プログラミング班の今後の課題はソリトン波について研究を深めることと、二次元の波の

シミュレータから三次元の波のシミュレータにグレードアップさせることが挙げられる。理論班の今後の課題としては n 個の孤立波を表す KdV 方程式である n-ソリトン解の導出とそれにおける初期値問題の解決をすることが挙げられる。これはおそらく非線形微分方程式のみの観点だけでは解決できない問題のため、その他の数学的な勉強をすることにより改善されるものではないかと考えられる。具体的には数学系の勉強だけでなく物理系の勉強が足りていなかったのではないかと考察している。またプロジェクト全体の課題としては、前年度の課題点として社会的実現性のあるシミュレーションツールの作成が必要であり、本年度はシミュレーションツールを用いた複雑系理解の有効性を立証する必要があったが、前述の通り本プロジェクトの本質を発表を聞いていた人に伝えることが到底できたわけでもなければ、期日前に焦って作品や報告書などを完成させたり、人数は少なかつたものの、班員全体がひとつの物事の取り組みに一丸となりすぎて時間を大幅に割いてしまったり遠回りをする事があったので、今後このような多人数の活動をする際にはその活動に出来るだけ多くの時間をとって課題に取り組むことと全員で一つの物事に集中するのではなく様々な視点からひとりひとりが真剣に各々の問題に取り組むべきであると考えた。

#### 参考文献

- [1] とだもりかず 戸田盛和. 非線形波動とソリトン. 日本評論社, 2000.
- [2] ときひろてつじ 時弘哲治. 3 開かれた数学 箱玉系の数理. 朝倉書店, 2010.
- [3] うえのきみお 上野喜三雄. ソリトンがひらく新しい数学. 岩波書店, 1993.