公立はこだて未来大学 2017 年度 システム情報科学実習
グループ報告書

Future University Hakodate 2017 System Information Science Practice
Group Report

プロジェクト名

数学学習環境のデザインと実現

Project Name

Design and Implementation of a Learning Environment for Mathematics

グループ名

コンテンツ班

Group Name

Contents Group

プロジェクト番号/Project No.

3-A

プロジェクトリーダ/Project Leader

1013223 乗田 拳斗 Kent Norita

グループリーダ/Group Leader

1015122 田谷 花乃子 Kanoko Taya

グループメンバ/Group Member

1011026	大島 洋明	Hiroaki Oshima
1011149	大河原 昂也	Koya Okawara
1015040	鍋田 志門	Shimon Nabeta
1015122	田谷 花乃子	Kanoko Taya
1015128	馬場 鯨介	Kyosuke Baba
1015151	古屋敷 匠	Sho Huruyashiki
1015162	須貝 奎哉	Keiya Sugai
1015211	戸坂 俊平	Shunpei Tosaka

指導教員

高村博之 美馬義亮 冨永敦子

Advisor

Hiroyuki Takamura Yoshiaki Mima Atsuko Tominaga

提出日

2017 年 01 月 19 日

Date of Submission

January 19, 2017

概要

公立はこだて未来大学（以下、本学と記す）のカリキュラムポリシーによると、「数理的思考」を身につけることになっており、1 年次の必修科目である解析学が、その役割を任されている。しかし、本プロジェクトメンバーは、1 年次に解析学の単位を取得することができたにも関わらず、この「数理的思考」を身につけていなかった。なぜなら、高校でもやっていたような、問題固有の解き方のみに注目し、その方法を覚えるといったような学習方法を続けていたからである。そこで我々は、講義だけで「数理的思考」を身につけるのは難しいと考え、e-Learning サービスを用いて解析学の学習支援を行うこととした。そのため、解析学の履修者である本学の 1 年生を支援するサービス作成を目指した。この活動は、2015 年度から行われており、我々はこの活動を引き継ぎ活動を行うことにした。2016 年度の主な成果物として、数学用語の理解を目的とした学習支援サイトを作成した。2017 年度のプロジェクトでは、この成果物の問題点を解決しつつ、より効果的に数学を学習者に学んでもらえる e-Learning サービスを作成することとした。

まず、数学の教材を作る以上、本プロジェクトメンバーが数学を十分に理解していないと、利用者に誤った知識を与えてしまう可能性がある。そのため、我々は実際に解析学の問題を解くことにした。その結果、「問題を解く際に、わからない用語があった場合、教科書[*1]を用いてその用語を調べる。」という学習方法が、数学学習において重要であることがわかった。なぜならば、問題に直結する知識だけではなく、それを理解するために必要な知識を学べるからである。これを続けることで、「数理的思考」の 1 つである、蓄積した知識を組み合わせて問題を解決する能力の養成につながる。そして我々は、この学習方法を実践できていないことがわかった。このことから、解析学を履修中の 1 年生も我々と同様にこの学習方法を実践できていないのではないか、という仮説を立てた。この仮説を検証するために、解析学 I 勉強会を実施した。その結果、1 年生も我々と同様に、「教科書を用いて用語を調べることができていない」ということが判明した。後期は、教科書を用いて用語を調べることを支援するモバイルウェブアプリの作成を目標に活動した。本グループ（コンテンツ班）は、問題のつまづくポイントの作成、数学用語や定理間の繋がりを明確化し、模範解答の作成を行なった。その後、我々が作成したモバイルウェブアプリが本プロジェクトの目標を達成しているかどうか調査するため、「解析学 II 勉強会」を実施した。その結果、すべての参加者が、教科書を用いて用語・定理を調べる学習方法を身につけることができたことが明らかになった。本報告書では、以上についての本グループの活動および考察を詳細に記述する。

キーワード　解析学, 学習支援, e-Learning

（※文責: 古屋敷匠）

[*1] 本報告書での「教科書」は一般的な教科書を指す場合と、本学で解析学の教科書として使用されている「共立出版 上見練太郎共著 『微分 改訂版』」を指す場合がある。

Abstract

According to the curriculum policy of Future University Hakodate, 1st graders study analysis to acquire “mathematical thinking” . In spite of this project member could get the unit of analysis, we couldn’t acquire “mathematical thinking” . Because we continued our learning method such as remembering how to focus only on problem-specific answer as we did in high school.We thought it was difficult to acquire “mathematical thinking” only with a lecture, so we decided to do analytical learning support using e-Learning service. We aimed to create a service to support 1st graders taking analysis. This activity has been taking place since 2015, and we decided to take over this activity. In 2016, we created a learning support site aimed at understanding mathematical terms. In 2017, we decided to create an e-Learning service that allows students to learn mathematics more effectively by solving the problems of the deliverable in 2016.

First of all, if we can not understand math correctly, there is a possibility of giving 1st graders incorrect knowledge. Therefore, we actually decided to solve the problem of analysis. As a result, we found that “When solving a problem, if there are unknown terms, using the textbook to examine the term.” is very important. Because we can learn not only the knowledge directly connected to the problem but also the necessary knowledge to understand it.Continuing this leads to the training of the ability to solve problems by combining accumulated knowledge, which is one of ”mathematical thinking”.Not only that, we found that we could not practice this learning method. Based on this, we made a hypothesis that 1st graders who are taking the analysis may not be able to practice this learning method as well. In order to verify this hypothesis, “Analysis 1 study meeting” was held. As a result, we found that “first graders can not find terms using a textbooks, too”. In the latter term, we aimed to create a mobile web application that assists in finding terms using textbooks. This group did creating a tripping point of the problem, clarifying the connection between mathematical terms and theorems and creating model answers. After that, in order to investigate whether the mobile web application we created has reached the goal of this project, we conducted “Analysis 2 study meeting”. As a result, it became clear that all participants were able to acquire a learning method to examine the term and theorem using textbooks. In this report, we describe the activities and considerations of this group in detail.

Keyword Analytics, Learning support, e-Learning

（※文責: Keiya Sugai）

目次

第 1 章　はじめに

本プロジェクトは、解析学の学習環境を整備するプロジェクトである。プロジェクト活動を行うにあたって、プロジェクトに所属しているメンバーをコンテンツ班、実装班、検証班の 3 つのグループに分けた。本報告書では、コンテンツ班の活動について記述する。本章では、まず、数学学習に関する背景、先行研究について述べる。次に、2016 年度までの活動について述べる。

（※文責: 馬場鯨介）

1.1　本プロジェクトの背景

本学には、学部教育における方針の 1 つとして、カリキュラムポリシー [1] というものがある。それによると、「学部共通専門科目群では、各コースで専門的に学ぶために必要となる基礎的な能力、すなわち計算論的思考、数理的思考、日本語による読解力・作文力、英語の語彙力・読解力・作文力を身につける。」とある。ここで 1 年次における学部共通必修科目である「解析学 I・II」はこのポリシーの「数理的思考」を身につけることを任されている。しかし、本プロジェクトメンバーは、1 年次に解析学の単位を取得しているのにもかかわらず、この「数理的思考」が身についていなかった。その根拠として、本プロジェクトメンバーは以下のような経験をしていた。

- 「力学基礎」で微分ができなくてテストが 0 点だった。
- 「システムと微分方程式」で積分ができずに散々な目にあった。

これでは、たとえ解析学を履修していたとしても、本学のカリキュラムポリシーに従って履修できたとは言えない。

しかし、本プロジェクトメンバーが「数理的思考」を身につけていなかったように週 1 回の講義だけでは「数理的思考」を身につけることは難しいのではないかと考えた。 河添（2011）[2] を要約すると、「大学をとりまく環境が急速に変化する中で数学教育も積極的にその変化に対応していく必要があり、この時代にふさわしいパソコンなどの電子機器を用いた教材が求められている。」となる。そこで、パソコンを用いた学習方法の 1 つに e-Learning サービスが挙げられる。

実際に千歳科学技術大学 [3] では、「ICT 活用を通じた横断的な機関・科目連携に基づく理数系教育の実践と評価」という研究テーマが文部科学省の「先導的教育情報化推進プログラム」に採択され、e-Learning サービスに関する調査を行なった。調査は、平成 21 年 4 月から 12 月の 1、2 学期の期間、北海道旭川実業高等学校の普通科 2 年生数学 II·B 履修者を対象に行った。方法としては、e-Learning サービスを利用したクラス（① クラス : 34 名）と利用しないクラス（②、③ クラス : 32 名）を設定し、各学期の中間考査・期末考査の計 4 回の定期考査の効果と、各定期考査の 1 週間前の学習時間についての測定を行なった。その結果、e-Learning サービスを利用した ① クラスが計 4 回の定期考査全てで、利用しなかった ②、③ クラスの平均を上回り、成績の向上の傾向が見られた。また、 1 週間前の学習時間についても、① クラスは家庭学習の取り組み時間が、②、③ クラスよりも多い傾向が見られた。

この事実より、e-Learning サービスを用いた学習が若者に適していることと、理数系科目の学習に適していることが考えられる。さらに、解析学が数理系科目に含まれていることを踏まえた結

果、e-Learning サービスを用いて解析学学習をサポートすることは、大学生の学力が上昇すると考えられる。

（※文責: 古屋敷匠）

1.2　2016 年度までの数学関連プロジェクト

2015 年度、2016 年度に、数学学習を支援するプロジェクトが行われた。本プロジェクトは、それらの活動を引き継ぐ形で、数学学習を支援する活動を行った。2016 年度では、本学の 1 年生の解析学における学習環境を整備することを目的として活動を行った。そして、数学用語の理解を目的とした学習支援サイト、「ますますたでぃ 2016」を作成した。

2016 年度は、「本学の 1 年生は教科書を使用して学習しているが、問題を完答することができない」という課題を発見した。この課題は数学用語を理解していなかったことが原因だと考えられた。その対策として、本学の 1 年生の理解を促す方法を 2 つ見出した。 1 つ目は、出題された問題に対応する関数のグラフを示す方法である。 2 つ目は、学習者がわからない箇所について、複数人で議論する方法である。これら 2 つの方法を踏まえて作成された「ますますたでぃ 2016」を使用した 1 年生にアンケートをとった。その結果、解答の書き方がわかったと感じた学生が多かった、という結果が得られた。

この「ますますたでぃ 2016」 には、いくつかの問題点もあった。その中でも特に次の 3 つは重要だと我々は判断した。 1 つ目は、使用する場所が限定されるということである。「ますますたでぃ 2016」はパソコンで使用することを想定されたものであり、さらに、学内でしか利用することができなかった。 2 つ目は、勉強会とセットでなければならない、ということである。プロジェクトメンバーが使い方を補助する必要があったことが原因である。 3 つ目は、問題数が少ない、ということである。これは、 1 つの問題に対し、大量のチェックテストがあったため、問題の作成および実装に時間がかかってしまったことが原因である。

（※文責: 鍋田志門）

1.3　2017 年度の目標

前節であげた問題点を解消するために、2017 年度の活動では次のことを行うことにした。まず、パソコンでもスマホでもアクセス可能な web コンテンツを作成することである。パソコンとスマホに対応することにより、場所を問わずに使用できる web コンテンツになる。次に、一人でも使用可能な web コンテンツを作成することである。これにより、勉強会後でも自学自習に利用でき、いつでもサポートすることができる。最後に、web コンテンツ内で出題する、 1 つ 1 つの問題にかかる実装の時間や手間を減らすことである。これにより、問題数を増やし、幅広い分野をサポートできると考えられる。

これらのことを踏まえ、2017 年度の活動では「2016 度の活動によって挙げられた問題点を解消し、本学の 1 年生に、より効果的に数学を学んでもらうための e-Learning サービスの作成」を目標とする。

（※文責: 鍋田志門）

第 2 章　前期の活動内容

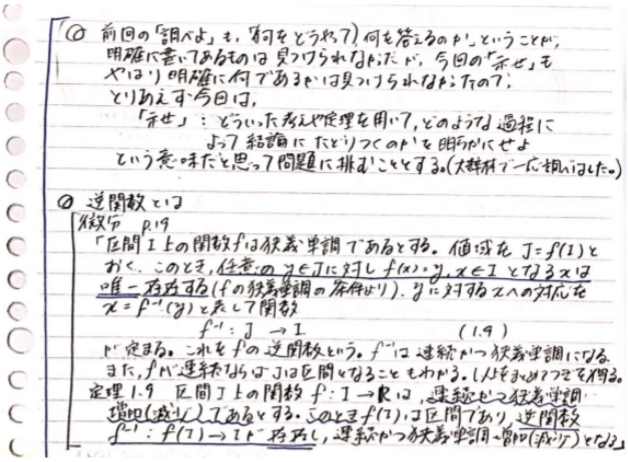
前期の活動は、大きく 3 つに分けられる。1 つ目は、プロジェクトメンバー自身の数学学習における問題点を見つけるために行った「プロジェクト内学習会」である。2 つ目は、「解析学 I 勉強会」である。この勉強会では、1 年生の普段の学習方法のほか、発見した我々自身の問題点が 1 年生にも当てはまるのか調査した。3 つ目は、プロジェクトの活動内容や進捗状況を紹介する目的で行われた「中間発表会」である。本章では、これらの活動の詳細について述べる。なお、我々は前期の「解析学 I 勉強会」と後期の「解析学 II 勉強会」あわせて 2 回の勉強会を実施している。本章で単に「勉強会」と書いた場合は、前期に実施した「解析学 I 勉強会」を指す。

（※文責: 戸坂俊平）

2.1　プロジェクト内学習会

2017 年度の目標である e-Learning サービスの作成を実現させるために、メンバーは「プロジェクト内学習会」を行った。プロジェクト内学習会とは、プロジェクト内で数学を学ぶ活動である。この活動を行う目的は 2 つある。 1 つ目は、それぞれのメンバーが数学を正しく理解することである。メンバーが数学を十分に理解していないと、我々が作成する予定の e-Learning サービスの利用者に、誤った知識を与えてしまう可能性がある。 2 つ目は、プロジェクトメンバー自身の数学学習における問題点を見つけるためである。この目的を定めた理由は、「メンバーが抱えている数学学習における問題点を、 1 年生も抱えているのではないか」と考えたからである。

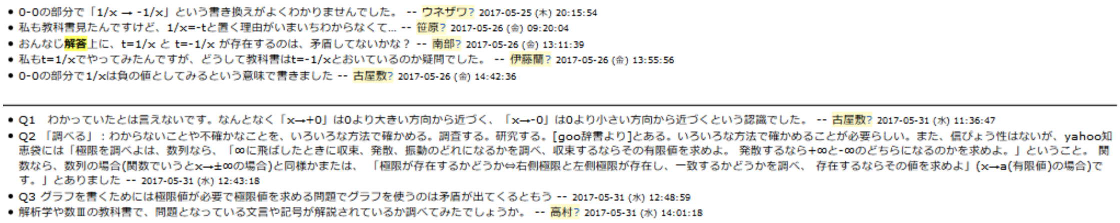
プロジェクト内学習会は次の方法で行われた。まず、教員が教科書から問題を出題し、メンバーがそれぞれの力で解いた。このときメンバーは、インターネットのウェブサイトや講義ノート、教科書、参考書など、様々なものを参照しながら問題を解いた。参照したものと、「どのように考えたか」、「何がわからなかったか」などを、解答用紙にメモをとりながら問題を解き進めた。例えば、問題文に含まれる「調べよ」という言葉が、一体何を指示しているのかわからない場合、その旨をそのままメモとして残した。この例に関しては、図 2.1 に詳細を示す。メンバーが解答を終えたら、それを本プロジェクトの wiki で共有した。次に、共有した解答にメンバー全員が目を通し、考えたこと、疑問に思ったことなどをコメントした。例えば、「私はあなたの解答のここの部分が納得できない」、「私はこういうつもりで記述しました」といった具合である。最後に、教員にもコメントしてもらった。これらのコメントについても、図 2.2 に実際のコメントの一部を示す。これらの活動を 5 月 12 日から 6 月 7 日までの期間で計 6 題について行った。



◎ 前回の「調べよ」も，「何をどうやって何を答えるのか」ということが，
明確に書いてあるものは見つけられなかったが，今回の「示せ」も
やはり明確に何であるかは見つけられなかったので，
とりあえず今回は，
「示せ」：どういった考えや定理を用いて，どのような過程に
よって結論にたどりつくのかを明らかにせよ
という意味だと思って問題に挑むこととする。(大辞林で一応調べはした。)

◎ 逆関数とは
微分 p.19
「区間 I 上の関数 f は狭義単調であるとする。値域を $J=f(I)$ と
おく。このとき，任意の $y\in J$ に対し $f(x)=y$, $x\in I$ となる x は
唯一存在する（f の狭義単調の条件より）。y に対する x への対応を
$x=f^{-1}(y)$ と表して関数
$f^{-1}: J \to I$ (1.9)
が定まる。これを f の逆関数という。f^{-1} は連続かつ狭義単調になる。
また，f が連続ならば J は区間となることもわかる。以上をまとめてつぎを得る。
定理 1.9 区間 I 上の関数 $f: I\to \mathbb{R}$ は，連続かつ狭義単調
増加(減少)であるとする。このとき $f(I)$ は区間であり，逆関数
$f^{-1}: f(I)\to I$ が存在し，連続かつ狭義単調増加(減少)となる」

図 2.1　解答用紙のメモ



- 0-0の部分で「1/x → -1/x」という書き換えがよくわかりませんでした。 -- ウネザワ? 2017-05-25 (木) 20:15:54
- 私も教科書見たんですけど、1/x=-tと置く理由がいまいちわからなくて... -- 笹原? 2017-05-26 (金) 09:20:04
- おんなじ解答上に、t=1/x と t=-1/x が存在するのは、矛盾してないかな？ -- 南部? 2017-05-26 (金) 13:11:39
- 私もt=1/xでやってみたんですが、どうして教科書はt=-1/xとおいているのか疑問でした。 -- 伊藤蘭? 2017-05-26 (金) 13:55:56
- 0-0の部分で1/xは負の値としてみるという意味で書きました -- 古屋敷? 2017-05-26 (金) 14:42:36

- Q1　わかっていたとは言えないです。なんとなく「x→+0」は0より大きい方向から近づく、「x→-0」は0より小さい方向から近づくという認識でした。 -- 古屋敷? 2017-05-31 (水) 11:36:47
- Q2 「調べる」：わからないことや不確かなことを、いろいろな方法で確かめる。調査する。研究する。[goo辞書より]とある。いろいろな方法で確かめることが必要らしい。また、信ぴょう性はないが、yahoo知恵袋には「極限を調べよは、数列なら、「∞に飛ばしたときに収束、発散、振動のどれになるかを調べ、収束するならその有限値を求めよ。 発散するなら+∞と-∞のどちらになるのかを求めよ。」ということ。 関数なら、数列の場合(関数でいうとx→±∞の場合)と同様かまたは、 「極限が存在するかどうか⇔右側極限と左側極限が存在し、一致するかどうかを調べ、 存在するならその値を求めよ」(x→a(有限値)の場合)です。」とありました -- 2017-05-31 (水) 12:43:18
- Q3 グラフを書くためには極限値が必要で極限値を求める問題でグラフを使うのは矛盾が出てくるともう -- 2017-05-31 (水) 12:48:59
- 解析学や数Ⅲの教科書で、問題となっている文言や記号が解説されているか調べてみたでしょうか。 -- 高村? 2017-05-31 (水) 14:01:18

図 2.2　解答に対するコメント

プロジェクト内学習会を終えて、メンバーの解答の仕方や、学習方法には様々な問題点があることがわかった。 それらを以下に示す。

- 不確かな記憶を元に解答してしまった。

  以前に学習したはずの知識が曖昧であり、さらに、自分の知識が曖昧であることに気付かずに解答していた。
- わからないことについて、インターネットで検索してしまった。

  インターネットには信憑性に欠ける情報や、数学的な裏付けが不十分な情報も存在している。しかし、メンバーはこれらの情報を元に解答をしていた
- 教科書をしっかりと読んでいなかった。

  メンバーは問題文中の用語や記号を正しく理解しないまま問題を解いていた。これが原因で、教科書の言葉に従った解答ができていなかった。

また、これらの他にメンバーはわかったことが 2 つあった。 1 つ目は、自分が理解していない数学用語がわかったことである。これは、自分の疑問点を可視化したことと、解答を共有した際にメンバーがコメントし合ったことからわかった。 2 つ目は、教科書にわからない箇所があったら、わからない箇所の前に戻って読み直すことの重要性である。これは、共有した解答に対して、教員がコメントしてくれたことによってわかった。

これらの結果からいくつかの考察ができた。最初の考察は、「用語を理解するためには、教科書を“読む”ということが重要だ」ということである。ここで、我々が定義する“読む”とは、次のような一連の手順である。

1. 問題を解く際にわからない用語があったとき、教科書を用いてそれを調べる。
2. 調べた上で、その説明の中にわからない用語があった場合、教科書の前のページに戻って調

べる。

3. わからない用語がなくなるまで手順 2 を繰り返す。

例えば、「Maclaurin の定理」について調べる場合について考えてみる。教科書で「Maclaurin の定理」を調べてみると、説明の中に「無限級数」や「n 回微分可能」といった数学用語が書かれている。もし、これらの用語の意味がわからない場合は、そのページより前の「無限級数」や「n 回微分可能」について説明されているページを参照し、用語の意味を理解する必要がある。そこにもわからない用語があれば、さらに前のページに戻って調べる必要がある。このように、前へ前へと戻っていく作業を、わからない用語がなくなるまで続ける。これが、我々が定義する“読む”である。

この“読む”を大学数学に適用する場合、高校数学まで戻らなければならない可能性がある。なぜなら、大学数学は、高校数学の内容を前提知識として構成されているためである。この考察ができたのは、プロジェクト内学習会をとおして、教科書の重要性に気が付いたからである。次に、メンバーのほとんどが教科書を“読む”ことができていなかったことから、1 年生も我々と同様に、教科書を“読む”ことができていないと考えられる。この考察は非常に重要な問題だと判断した。そして、この考察をもとに「1 年生も我々と同様に、教科書を“読む”ことができていない」という仮説を立てた。これを検証するために、次の活動として「解析学 I 勉強会」を企画した。

（※文責: 鍋田志門）

2.2 解析学 I 勉強会

前節で述べたプロジェクト内学習会から、我々は「1 年生も教科書を“読む”ことができていないのではないか」という仮説を立てた。そして、それを検証するために、「解析学 I 勉強会」を実施した。また、「勉強会を通して 1 年生の学習方法は変わるのか」、「1 年生はどのような学習方法で学習しているのか」という 2 つの観点で学習状況の調査も行った。

勉強会の準備を行うために、プロジェクトメンバーは広報班、数学班、アンケート班の 3 つのグループに分かれた。広報班はフライヤーの作成・配布や、参加募集のメール送信をした。数学班は、勉強会で使用する問題や模範解答を作成した。アンケート班は、1 年生に実施するアンケートの作成と集計をした。

勉強会実施日は 6 月 16 日、対象者は解析学 I を履修している本学の学生とした。勉強会当日は、参加者に勉強会の前と後でアンケートの回答をしてもらった。そして、2 つの問題に解答してもらった。プロジェクトメンバーは、参加者の学習方法の観察や、参加者に「何を参照にしたか」、「どう解いたか」などの質問をした。そこで、「解析学 I 勉強会」を通じて、明らかになったことが 3 つある。

1 つ目は、1 年生は正しく教科書を参照できると思い込んでいることである。勉強会でプロジェクトメンバーが 1 年生の様子を観察した結果、1 年生は教科書をパラパラめくるだけで、きちんと参照している様子は観察できなかった。しかし、1 年生に対し実施したアンケートの結果では、「教科書のどの部分を参照すればよいかわかっている」(N=41) と回答する 1 年生が 23 人もいた。我々はこの結果から、1 年生は教科書を参照することができていると思い込んでしまっているのではないかと推測した。

2 つ目は、1 年生は数学用語や定理をきちんと理解しないまま問題を解いているということであ

る。勉強会で解いてもらった解答用紙を分析した結果、教科書に記載されていないような記述がみられた。例えば、「$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x}$ を調べましょう」という問題の解答用紙には、「 $x=0+0$ のとき ∞、 $x=0-0$ のとき ∞」といった記述が見受けられた。これは数学的に存在しない状態である。このことから 1 年生は正しく数学用語や定理を理解しないまま数学学習に取り組んでいるのではないかと考察した。

3 つ目は、1 年生は教科書を利用して勉強しているが、正しく使うことができていないということである。「課題を解くときに何を参考にしていますか」(N=41) という質問に対して、「大学の教科書」と回答した学生は 36 人だった。しかし、「課題を解くときに略解を参考にすることがありますか？」（N=41）というアンケートの質問に対して「略解を用いて解答を作成している」と回答した学生が 23 人存在した。このことから 1 年生は数学用語や定理を理解するために教科書を使用するのではなく、例題や略解を見るために教科書を使用しているのだということがわかった。次に勉強会を通して見受けられた、1 年生の 2 つの変化について述べる。

1 つ目は、教科書を自発的に読むようになった点である。出題した問題と共に、その問題と関連性が高い単語を提示することで、実際に教科書を参考にする 1 年生の数が増えた。 例えば、勉強会で扱った極限に関する問題では、「片側極限について調べてみよう」といったように、1 年生に問題に関連したキーワードを提示した。すると 1 年生は、そのキーワードが載ったページを参照しながら問題を解き進めた。

2 つ目は、高校の教科書、大学の教科書共に、それぞれの有用性に気づいた点である。高校数学の分野まで立ち戻る必要がある問題を用意することで、教科書の有用性に気づき、実際に教科書を遡って読んでもらうことができた。

（※文責: 馬場鯨介）

2.3 中間発表会

本節では、中間発表会について述べる。まず、それに向けて行った準備について述べる。次に、その時の様子と、そこで得られた発表評価アンケートの結果および考察について述べる。

中間発表会に向けて、プロジェクトメンバーはスライド班、ポスター班、フォローアップ班の 3 つの班に分かれた。なお、この班分けは中間発表会準備の間だけである。

スライド班は、発表用のスライド作成を行った。具体的には、前期に行った活動について振り返り、それを元にスライドの骨組みを作成した。そして、作成した骨組みに沿ってスライドの作成を行った。しかし、メンバーや教員によるレビューの内容をうまく反映させることができなかった。その影響で、スライドの完成が期日よりも遅れる結果となった。

ポスター班は、発表用ポスターの作成を行った。ポスターとスライドは内容を擦り合わせる必要があった。しかし、スライドの完成が予定よりも遅れてしまったため、ポスター作成の着手に遅れが生じた。また、仕事を明確に分担していたが、分担の方法が適切ではなかったため、班員同士の仕事量に偏りが生じた。その結果、予定よりもポスターの完成が遅れ、中間発表会当日に完成した。

フォローアップ班は、フォローアップアンケートと発表評価シートを作成した。フォローアップアンケートとは、勉強会に参加した 1 年生の数学学習にどのような影響を与えたのかを調査するため、中間テスト後に、勉強会参加者に対して行ったアンケートのことである。

同班は、班内で 2 つのグループに分かれて活動した。

1 つ目のグループは、フォローアップアンケートの作成を行った。具体的には、質問内容を作成し、作成したアンケートをメールで送信した。その後、回答してもらったものを集計し、分析した。

2 つ目のグループは、発表評価シートの作成を行った。本学より指定された雛形を元に完成させた。フォローアップ班はこれらの作業を予定よりも早く終わらせてしまった。しかし、次のタスクの確認が不十分であったため、着手可能なタスクがない状況が続いた。この状況を脱するため、当日、メンバーがスムーズに発表を行うことができるよう尽力した。

このようにして全ての班は準備を終えた。

当日は、メンバーを前半と後半に分け、計 6 回の発表をそれぞれ 3 名で 3 回ずつ行った。発表の際、聴講者に発表評価シートを配布し、回答してもらった。発表評価シートの項目は、発表技術と発表内容の 2 つであった。両方の項目において評価方法は、1（非常に悪い）から 10（非常に優秀）の 10 段階評価と、自由記述によるコメントを記述してもらう、というものだった。学生と教員を合わせて 76 名の評価を受け、項目ごとに記入が為されているものを有効票、記入が為されていないものを無効票とした。また、自由記述にて得られた評価は下記の表 2.1 のとおりである。

発表技術についての評価の平均は 8.21 （有効回答数 N=72、標準偏差 SD=1.23）であった。発表技術の良かった点として、「スライドがわかりやすかった」といった意見が挙げられた。改善点として、「スライドを読み上げている印象を受ける」という指摘が目立った。この指摘は、スライドの順序の把握をできていなかったことや、発表練習が不足していたことが原因として考えられる。

発表内容についての評価の平均は 7.73（有効回答数 N=66、標準偏差 SD=1.42）であった。発表内容の良かった点として、「しっかり現状を調べて補助できるように考えてある」という意見が挙げられた。改善点として、「これから何を作っていくのか具体的なビジョンが見えない」という指摘が目立った。この指摘は、我々が学習会や勉強会を通して発見した数学学習の問題点をどのように解決していくのかという、具体的な説明が欠けていたことが原因として考えられる。

表 2.1　自由記述で得られたコメント

発表技術に関して	声の大きさや速さ、抑揚などがちょうど良くて、聞き取りやすかった。
	スライドが見やすかったので内容が理解しやすかった。
	ジェスチャーを交えていたため印象に残りやすかった。
	グラフなどで自分たちの伝えたいところももっと目にだせるとわかりやすいと思った。
	話者にスライドを読んでいる印象を受けてしまった。
	話のつなげ方に違和感があり、情報が断片的にしか入ってこなかった。
	質問に答える声が小さく、聞き取りづらかった。
発表内容に関して	前年度のプロジェクト内容をブラッシュアップし、より良いものを作ろうとする意図を感じた。
	しっかり現状を調べて補助できるように考えてあると感じた。
	目的が明確でよかったと感じた。
	数学学習へのモチベーションの向上は難しいのではないか。
	課題の確認は良いが、具体的にどのようなサポートを行うのかわからなかった。
	数学の補助教材を e-Learning で作るのは、難しいのではないだろうか。
	このプロジェクトの社会的意義はあるのだろうか。

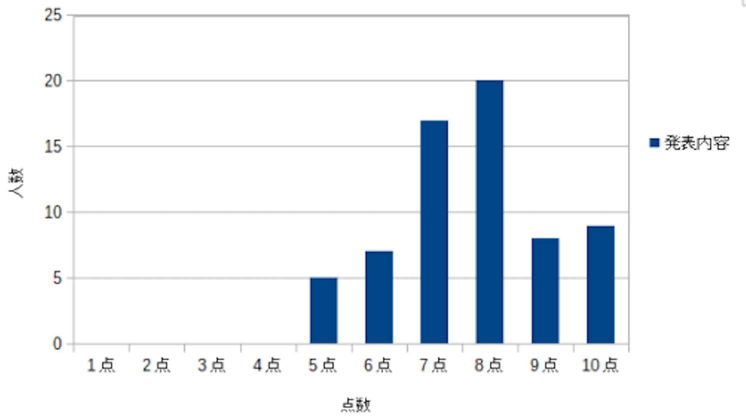


図 2.3　発表内容度数分布図

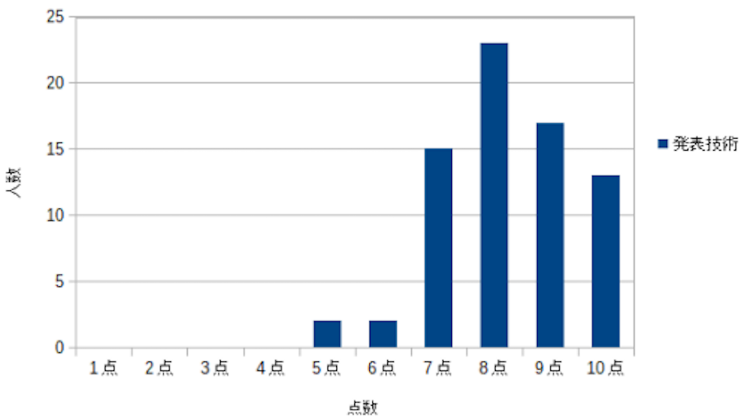


図 2.4　発表技術度数分布図

（※文責: 須貝奎哉）

2.4　前期の活動のまとめと後期への展望

前期は、「プロジェクト内学習会」、「解析学 I 勉強会」、「中間発表会」の 3 つの活動を行った。

まず、「プロジェクト内学習会」を通して、プロジェクトメンバーの学習方法に問題点が見つかった。特に、数学用語の理解が不十分なこと、教科書を “読む” ことができていないことは重大な問題だと捉えた。そして、解析学 I を履修済みのプロジェクトメンバーでさえこのような問題を抱えているということは、現在、解析学 I を学習中の 1 年生も同様の問題を抱えているはずであると予測した。

この仮説が正しいのかを検証するために、「解析学 I 勉強会」を実施した。当日、我々は、1 年生が問題に取り組む様子や、解答用紙の書き方などを観察した。また、勉強会の前後でアンケートをとり、分析した。その結果、やはり 1 年生も教科書を “読む” ことができていないと判明した。

そこで、2015 年度のプロジェクトの目標を「教科書を “読む” ことを促し、支援する e-Learning サービスを作成すること」と具体化した。さらに、2016 年度の「ますますたでぃ 2016」にあった「問題数が少ない」という問題点を解決することも目指した。しかし、作成するシステムの設計上、やはり問題数を増やすことが難しいという面もあった。そのため後期は、いかにシステムに取り入

れやすいコンテンツを作成するか、よく吟味して活動することになった。

（※文責: 戸坂俊平）

第 3 章　後期の成果物と活動内容

本章では、後期の成果物と活動内容について 6 つに分けて記述する。まず、1 つ目は、本プロジェクトの成果物である「ModoLuca」の説明を行う。2 つ目は、本グループが作成したコンテンツ班の成果物について説明する。3 つ目は、成果物作成のための「コンテンツ班内学習会」について述べる。4 つ目は、コンテンツ作成の目標、流れ、結果および考察について述べる。5 つ目は、「ModoLuca」の検証をするために行った「解析学 II 勉強会」について述べる。最後に、成果発表会について述べる。

（※文責: 大島洋明）

3.1　「ModoLuca」の流れ

本プロジェクトの目標は、「教科書を "読む" ことを促し、支援する e-Learning サービスの作成」である。その目標を達成するため、本プロジェクトではモバイルウェブアプリ「ModoLuca」を作成した。この「ModoLuca」は、学習者が教科書の問題を解く際に、手が止まってしまう箇所（以下、「つまづきポイント」）に対して、教科書のどこを読めばつまづかないかをチャット形式で学習者に教示するアプリである。具体的に、どのように教示するか次の図 3.1 で説明する。

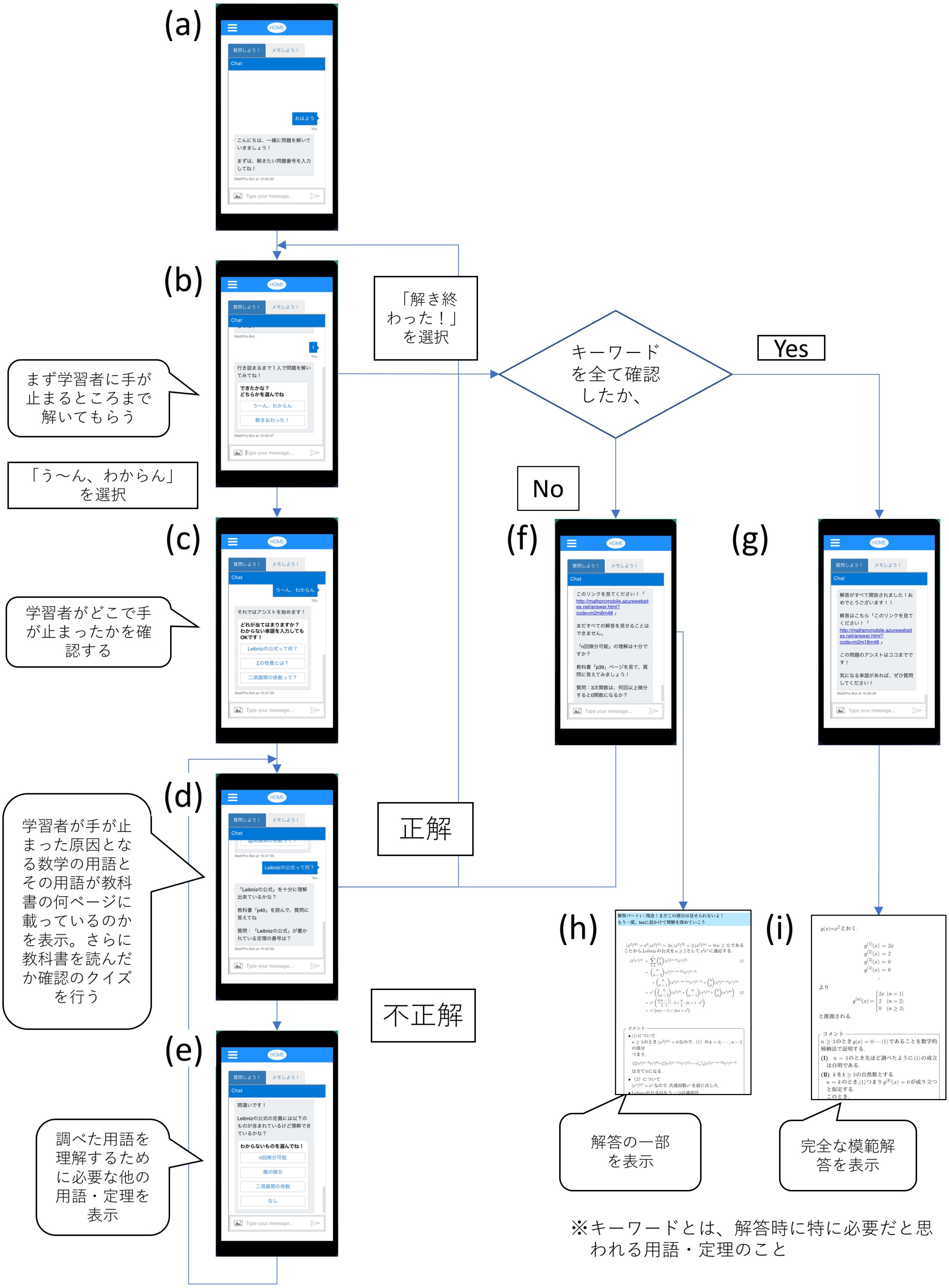


図 3.1　「ModoLuca」フロー図

（※文責: 古屋敷匠）

3.2　コンテンツ班の成果物

前節では、本プロジェクトの成果物であるモバイルウェブアプリ「ModoLuca」の概要を述べた。この「ModoLuca」のコンテンツ作成を本グループは行った。そのコンテンツは、大きく 2 つに分けられる。1 つ目は、数学的情報をまとめたデータベース（以下、データベース）である。2 つ目は、「ModoLuca」が提供する問題の模範解答（以下、模範解答）である。詳しい説明は以下に行う。

（※文責: 鍋田志門）

3.2.1　データベースの説明

データベースは、本グループの 1 つ目の成果物である。データベースには、「ModoLuca」のシステムと紐付けされている情報がまとめられている。また、データベースは、問題に関するもの、用語・定理に関するものに分類される。本節では、それらの詳しい説明を行う。

はじめに、本グループが実際にどのようなものを作成したのかを、図を用いて紹介する。これにあたり、問題に関するデータベースと用語・定理に関するデータベースの一部をそれぞれ図 3.2、3.3 に示し、それらの記載内容についての説明を行う。

問題番号	ページ数	大問番号	間違いパターン	解答表示条件
1	41	問7	①Leibnizの公式がわからない ②Σの性質がわからない ③二項展開の係数がわからない	①n回微分可能 ②Leibnizの公式 ③n回微分可能 Leibnizの公式
2	50	練習問題2.3.6	①Maclaurin展開がわからない ②!!の意味がわからない	①Maclaurin展開 ②跳び階乗
3	52	問11	①記号「lim」が何かわからない ②極限が∞/∞や0/0となってしまった ③logxの微分ができない ④sinxやtanxの微分ができない ⑤arcsinxの微分ができない	①対数関数の微分 L'Hôpital ②三角関数の微分 L'Hôpital ③逆関数の微分 L'Hôpital

図 3.2　問題に関するデータベースの一部

このデータベースには、「問題番号」、「ページ数」、「大問番号」、「間違いパターン」、「解答表示条件」という項目が設けられている。それらには、次のことが記載されている。

- 問題番号：「ModoLuca」に実装されている問題に割り当てられている番号
- ページ数：問題が記されている教科書のページ数
- 大問番号：問題が記されている教科書の問題番号
- 間違いパターン　：学習者の「つまづきポイント」
- 解答表示条件：キーワード[*2]

[*2] キーワードとは、図 3.1 で記したとおり、解答時に特に必要と思われる用語・定理のことである。以降に記されるキーワードも同様である。

word	page	question	answer	point
Leibnizの公式	p.40	「Leibnizの公式」が書かれている定理の番号は？	2.7	n回微分可能 積の微分 二項展開の係数
数列の極限	p.5	「数列とその極限」という節の番号は？	1.2	自然数 実数
積の微分	p.32	関数 f , g の積であるf・gの微分の形が書かれている定理の番号は？	2.2	関数 微分可能 定義域
微分可能	p.30	「微分係数」を表す数式の式番号は？	2.1	極限値
n回微分可能	p.39	3次関数は、何回以上微分すると0関数になるか？	4	微分可能
Σ記号	数Ⅱ:いろいろな数列 [Σの性質]			

図 3.3　用語・定理に関するデータベースの一部

このデータベースには、「word」、「page」、「question」、「answer」、「point」という項目が設けられている。それらには、次のことが記載されている。

- word：用語・定理
- page：word が記されている教科書のページ数
- question：「ModoLuca」が指定した参照ページを調べたか確認する質問
- answer：question に対する答え
- point：word の理解に必要な主たる用語・定理

次に、先程挙げた項目が「ModoLuca」のシステムのどの部分に利用されているのかについてと、項目作成の理由についての説明を行う。

前節の図 3.1(c) のとおり、学習者が問題解答時に手を止めたとき、「ModoLuca」は学習者に対して、どこでつまづいたかを聞く選択肢を提示する。この選択肢は、データベースの「間違いパターン」を利用している。つまり、学習者が手を止めたとき、「ModoLuca」は学習者に対して「間違いパターン」の提示を行う。

この「間違いパターン」の提示は、学習者自身に「つまづきポイント」を知覚させることができると考えられる。学習者が問題解答中につまづいた際、どこでつまづいているのかわからない場合がある。それは、自身の「つまづきポイント」を理解していないため生じる。具体的な言葉を選択肢で提示することで、何が原因でつまづいているのかを理解しやすくなる。そのため、「間違いパターン」の提示は、学習者自身に「つまづきポイント」を知覚させることできると考え、「間違いパターン」という項目を作成した。

「解答表示条件」という項目に関しては、「ModoLuca」が行う解答の表示に利用されている。図 3.1 で示したとおり、学習者がキーワードを確認することで、模範解答の一部が表示される。キーワードを確認する操作の繰り返しによって、模範解答がすべて表示される。このように解答を段階的に提示することで、学習者が容易に解答を閲覧することができない仕組みを設けた。これは学習者が解答をすぐ見て、それを写すことの防止と、学習者のわからないところを浮き彫りにすることに役立つと考えた。そのため、「解答表示条件」という項目を作成した。

「question」という項目に関しては、図 3.1(d) で示したような質問に利用されている。学習者が調べたい用語 · 定理を「ModoLuca」に入力後、「ModoLuca」はその用語 · 定理に関する質問を行う。この質問は、前述のとおり、学習者が「ModoLuca」の指定した参照ページを調べたかを確認するものである。この確認がなければ、「ModoLuca」が指定した参照ページを読まずに、解答を表示することができてしまう。そのため、段階的に解答を表示させるシステムが意味をなさなくなる。それを防ぐため、参照ページを調べたかを確認する質問を設けた。質問内容に関しては、答えが数字やアルファベット 1 文字など、単純なものとなるようにした。例えば、質問に対する答えの正解が「Leibniz の公式」だったとする。しかし、「ライプニッツの公式」、「らいぷにっつのこうしき」など正解と見なすべき入力内容は、多岐にわたる。システム的にそれらを網羅することは難しいと判断した。そのため、答えが数字など、単純となる質問内容にした。

質問に対して学習者が間違えた場合、「ModoLuca」は、図 3.1(e) のような選択肢を提示する。その選択肢は、間違えた質問に対応する用語 · 定理の理解に必要な他の用語 · 定理を含んでいる。また、それは、データベースの「point」を利用することによって、表示されている。用語 · 定理の理解には、他の用語 · 定理の理解が必要である。なぜなら、例えば「Leibniz の公式」に関する問題では、当然「Leibniz の公式」を知っておく必要がある。そして、「Leibniz の公式」は「積の微分法」、「微分可能性」、「二項展開」について理解していないと使用できない。さらに、「積の微分法」は「微分」についての知識が必要であり、「微分可能性」と「二項展開」についても同様に、他の用語 · 定理の知識が不可欠であるからである。 このように、用語 · 定理の理解には、他の用語 · 定理の理解が必要である。この考え方は、“読む”学習方法の根底にあるものである。つまり、 図 3.1(e) のような選択肢を学習者に提示することは、教科書を “読む”ことを促すと考えられる。そのため、「point」という項目を設けた。

（※文責: 大河原昂也）

3.2.2 模範解答の説明

本項では、本グループの 2 つ目の成果物である模範解答についての説明を行う。前項で述べたとおり、「ModoLuca」はキーワードを確認することで、段階的に解答の表示を行う。我々は、解答の表示方法にこのような工夫を施した。解答の表示方法だけでなく、模範解答の内容に対してもある工夫を施した。その工夫の説明を行うため、図 3.4 に模範解答の一部を示す。

$g(x)=x^2$とおく.

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= 2x \\ g^{(2)}(x) &= 2 \\ g^{(3)}(x) &= 0 \\ g^{(4)}(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

より

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} 2x & (n=1) \\ 2 & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases}$$

と推測される.

コメント

$n \geq 3$のとき$g(x) = 0 \cdots (1)$であることを数学的帰納法で証明する.

(I) $n = 3$のとき先ほど調べたように(1)の成立は自明である.

(II) kを$k \geq 3$の自然数とする.
$n = k$のとき,(1)つまり$g^{(k)}(x) = 0$が成り立つと仮定する.
このとき,

図 3.4　模範解答の一部

図 3.4 に示したとおり、模範解答には解答部分だけでなくコメント部分が存在する。このコメント部分が、模範解答の中身に対して行った工夫である。そこには、解答部分の補足説明が行われており、厳密な数学の考え方が記されている。図 3.4 は、実際に作成した模範解答の一部である。ここでは、x^2 の n 次導関数を求めている。解答部分では、帰納的に $(x^2)^{(n)}$ を推測している。しかし、数学の厳密な考え方では、数学的帰納法により、$(x^2)^{(n)} \quad (n \geq 3)$ を求める必要がある。コメント部分では、その数学的帰納法について述べられている。このように模範解答のコメント部分は、解答の補足説明を行っており、厳密な数学の考え方を述べられている。以上に述べたとおり、模範解答は、学習者のより厳密な数学の理解を助ける工夫も施されている。

（※文責: 古屋敷匠）

3.3　コンテンツ班内学習会

前節では、「ModoLuca」のコンテンツについて説明した。このコンテンツ作成には、コンテンツ作成に必要な数学的知識を得ることと、学習者を「ModoLuca」によってサポートすべき箇所の把握が必要であると考えた。それらを目的として、グループメンバーが数学の問題を解くコンテンツ班内学習会を実施した。その詳細については以下に記述する。

（※文責: 田谷花乃子）

3.3.1 目標

前述したコンテンツ班内学習会の目的を果たすため、この学習会で扱う問題に対して、次の 2 つの目標を定めた。

1 つ目は、解答の際に使われる、用語 · 定理同士のつながりを知ることである。つまり、用語・定理が他の用語・定理から成り立っている事実を確認することである。それを知ることで、本プロジェクトが作成する、教科書の “読む” を支援することを目的とするシステムのコンテンツ作成に必要な数学的知識の修得につながると考えた。

2 つ目は、メンバーの「つまづきポイント」を知ることである。学習者もメンバーと同じ箇所でつまづく可能性があるため、メンバーのそれを知ることは、学習者の「つまづきポイント」を知ることにつながると考えた。また、3.1 節で述べたとおり、学習者の「つまづきポイント」は「ModoLuca」の利用を意図している箇所でもある。つまり、メンバーの「つまづきポイント」を知ることは、学習者が「ModoLuca」を必要とする箇所を知ることにつながると考えられる。

（※文責: 須貝奎哉）

3.3.2 活動の流れ

学習会を行うにあたって、「ModoLuca」に実装する問題を教科書の演習問題から 11 問選定した。1.2 節で述べたとおり、2016 年度までのプロジェクトの成果物は問題数が少なかったため、2017 年度は解析学 II の中間試験の範囲を含む 11 問の解答作成に挑戦した。

それらの問題をメンバーがそれぞれ 1 題ずつ担当し、解説できるようになるまで学習を進めた。学習には原則として、教科書を使用することとし、必要があれば高校の教科書も参照した。また、わからない点や疑問に思う点についてはメモを残した。たとえば、「部分積分法は知っているが、そもそもどのような形の関数に対して用いればうまくいくのだろう。何か基準はあっただろうか。」といった具合である。メモを残したのは、それが「つまづきポイント」を知ることや、次節で述べる模範解答の作成に役立つと考えたからである。

さらに、その問題を解くために必要な用語 · 定理を網羅的に調べた。これは他のメンバーが同じ問題を解いた際につまづいた箇所を発見しやすくするためである。3.2.1 項で述べたように、ある用語 · 定理を用いるのには、それらに関連する他の用語 · 定理の知識も持ち合わせておく必要がある。したがって、それらをあらかじめ網羅的に調べておけば、他のメンバーがつまづいた際にも的確なヒントを与えることができる。

各個人が学習を終えた後は、メンバーを 3 グループに分けた。それぞれのグループ内で、各メンバーは自分の担当問題を他のメンバー全員に解いてもらい、その様子を観察した。解答者はつまづいたポイントや疑問点を積極的に共有するよう努めた。観察者はそれをもとに「つまづきポイント」や思考の流れを分析した。この分析により、学習者がつまづいた際、「ModoLuca」がどのようなヒントを提示すべきかを明確にすることができる。加えて、「ModoLuca」に実装する模範解答をどのように書くと伝わりやすいかを考えやすくなる。

そして、解答者が解答に行き詰まってしまった際には、観察者が用意しておいた、用語 · 定理を

網羅的に調べたリストをもとに、ヒントとなる教科書のページを示した。観察者も気づかなかったようなつまづきポイントや疑問点が出てきた場合は、教員にアドバイスを求めた。この一連の活動を、解答者が答案を書き上げられるようになるまで続け、11 問分すべてに対して同様に取り組んだ。

（※文責: 戸坂俊平）

3.3.3 結果

コンテンツ班内学習会で扱った、解析学 II の問題 11 問すべてに対して得られた結果は、大きく分けて 2 つあった。

1 つ目は、問題を解くために必要な用語 · 定理を理解できたということである。さらに、これらの用語 · 定理には、どのようなつながりがあるのかも理解することができた (図 3.5) 。

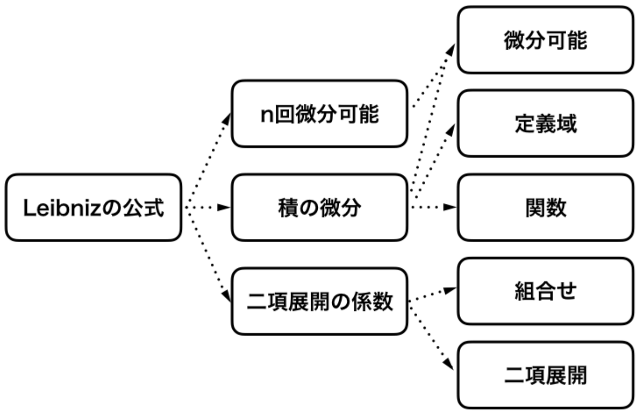


図 3.5　用語・定理のつながりの具体例を示した樹形図

図 3.5 には、具体例として「Leibniz の公式」をあげている。「Leibniz の公式」には、「積の微分法」、「微分可能性」、「二項展開」とのつながりがあり、この 3 つの用語 · 定理にもそれぞれに他の用語定理とのつながりがあることが示されている。

2 つ目は、メンバーの「つまづきポイント」を見つけることができたことである。「つまづきポイント」の具体例として、『微分』p.41 の問題をあげる。

問 7 Leibniz の公式を使い $f(x) = x^2 e^x$ を n 回微分せよ $(n \geq 2)$. その結果が $n = 0, 1$ でも成立することを確かめよ.

この問題については、以下の 3 つの「つまづきポイント」を発見した。

1. Leibniz の公式がわからない
2. Σの性質がわからない
3. 二項展開の係数がわからない

上記以外に、それぞれの「つまづきポイント」を解消するために必要な定理 · 用語を知ることができた。これらの結果より、コンテンツ班内学習会の目標が達成されたと言える。

（※文責: 田谷花乃子）

3.4 コンテンツの作成

前節では、成果物作成の準備のための「コンテンツ班内学習会」について述べた。本節では、この活動をもとに行った「ModoLuca」のコンテンツ作成について述べる。まず、この活動の目標を述べる。次に、この活動の流れについて述べる。この活動によって得られた結果と、それに対する考察について述べる。

（※文責: 古屋敷匠）

3.4.1 目標

コンテンツを作成する上での目標は、3.2 節で示したデータベースと模範解答を 3.3 節で扱った 11 問すべての問題に対して、次の 2 つを行うことである。 1 つ目は、アプリのシステムに必要な情報をまとめたデータベースを作成することである。 2 つ目は、誰が見てもわかりやすく、数学的に正しく、アプリのシステムに適した模範解答の作成をすることである。

（※文責: 鍋田志門）

3.4.2 活動の流れ

前節で述べたコンテンツ班内学習会をもとに、コンテンツを作成した。この活動は、前節で分けた小グループごとに行った。ただし、グループメンバーの 3 人が検証班へ移ったため、各小グループの人数が 1 人ずつ減った状態で活動が行われた。各小グループは、前節でそれぞれが扱った問題に対して、データベースと模範解答の作成を行った。本項では、それらの作成過程について説明する。

データベースの作成過程の説明にあたって、データベースの一部をそれぞれ図 3.6、3.7 に示す。なお、図 3.6 は図 3.2、図 3.7 は図 3.3 の再掲である。

問題番号	ページ数	大問番号	間違いパターン	解法解放条件
1	41	問7	①Leibnizの公式が分からない(Leibnizの公式) ②Σの性質が分からない(Σ記号) ③二項展開の係数が分からない(二項展開の係数)	①n回微分可能 ②Leibnizの公式 ③n回微分可能 Leibnizの公式
2	50	練習問題2.3.6	①Maclaurin展開が分からない(Maclaurin展開) ②!!の意味が分からない(跳び階乗)	①Maclaurin展開 ②跳び階乗
3	52	問11	①記号「lim」が何か分からない(極限値) ②極限が∞/∞や0/0となってしまった(不定形) ③logxの微分ができない(対数関数の微分) ④sinxやtanxの微分ができない(三角関数の微分) ⑤arcsinxの微分ができない(逆関数の微分)	①対数関数の微分 L'Hôpital ②三角関数の微分 L'Hôpital ③逆関数の微分 L'Hôpital

図 3.6　問題に関するデータベースの一部

word	page	question	answer	point
Leibnizの公式	p.40	「Leibnizの公式」が書かれている定理の番号は？	2.7	n回微分可能 積の微分 二項展開の係数
数列の極限	p.5	「数列とその極限」という節の番号は？	1.2	自然数 実数
積の微分	p.32	関数 f , g の積であるf・gの微分の形が書かれている定理の番号は？	2.2	関数 微分可能 定義域
微分可能	p.30	「微分係数」を表す数式の式番号は？	2.1	極限値
n回微分可能	p.39	3次関数は、何回以上微分すると0関数になるか？	4	微分可能
Σ記号	数Ⅱ:いろいろな数列 [Σの性質]			

図 3.7　用語・定理に関するデータベースの一部

上図のようなデータベースを作成するために、まず、問題が記載されている教科書のページ数をデータベースの「ページ数」に、問題番号を「大問番号」に入力した。データベースの「問題番号」には、入力した順に 1、2、3、··· と入力していった。次に、データベースの「間違いパターン」への入力作業を行った。3.3 節で得たグループメンバーの「つまづきポイント」をもとに、本学の 1 年生の「つまづきポイント」を推測した。その推測された「つまづきポイント」を「間違いパターン」に入力した。その後、データベースの「解答表示条件」の入力作業を行った。3.2.1 項で述べたように、「解答表示条件」にはキーワードを入力する。そのキーワードを各問題で定めるため、小グループ内で相談した。相談の結果、定めたキーワードを「解答表示条件」に入力した。

次に、3.3 節で得た問題を解くために必要な用語 · 定理をデータベースの「word」に入力し、その用語 · 定理の教科書の記載ページをデータベースの「page」に入力した。大学の教科書に記載さ

れておらず、高校の教科書に記載されている用語 · 定理に関しては、高校数学のどこの単元で学ぶのかのみを調べた。そして、3.3 節で得た用語 · 定理のつながりをもとに各用語 · 定理の理解に必要な主たる用語 · 定理をデータベースの「point」に入力した。その後、図 3.1(d) で示したような質問および、その答えを各用語 · 定理に対して作成した。質問は「question」、答えは「answer」に入力した。3.2.1 項で述べたとおり、答えが数字やアルファベット 1 文字など、単純なものとなる質問内容にした。 ただし、大学の教科書に記載されておらず、高校の教科書に記載されている用語 · 定理に関しては、質問および答えは作成しなかった。

以上の作業により、データベースを完成させた。その後、模範解答の作成を行った。その作成過程については以下に説明する。

1. 小グループのメンバーで解答を作成したものを教員に チェックしてもらい、改善点を挙げてもらう。
2. 1. で挙げられた改善点を踏まえて解答を作り直す。

この繰り返しを改善点がなくなるまで行った。この一連の作業により、誰が見てもわかりやすく、数学的に正しい解答を作ることを目指した。解答の完成後、段階的に解答を表示する「ModoLuca」のシステムに合うよう、データベースの「解答表示条件」をもとに解答を分割した。

（※文責: 大河原昂也）

3.4.3 結果および考察

コンテンツ班内学習会を経て、計 5 問の問題についてのデータベースと模範解答の作成を達成した。さらに、これらの成果を実装班に渡し解析学 II 勉強会で使用する「ModoLuca」が完成した。3.2 節で扱った 11 問の問題に対して、データベースと模範解答を作成することがこの活動での目標だった。しかし、時間の都合上、後述する解析学 II 勉強会までに 5 問に対してしか実装できなかった。実装するまでには至らなかったが、データベースと解答例の完成間近だった問題が 2 問あった。それらは勉強会後に実装した。最終的に実装した問題数は計 7 問だった。それは、1.2 節で述べた「実装する問題が少なかった」という昨年度までの本プロジェクトの課題を解消することになった。

（※文責: 大島洋明）

3.5 解析学 II 勉強会

前述のとおり、本プロジェクトの目標は、「学習者に対して教科書を “読む” ことを促し、支援する e-Learning サービスの作成」である。「解析学 II 勉強会」の目的は、「ModoLuca」がこの目標を果たしているのかを検証することである。この勉強会の詳細を以下に記述する。なお、本節で表記される「勉強会」は、「解析学 II 勉強会」を指しているものとする。

（※文責: 大河原昂也）

3.5.1　内容

勉強会は以下のとおり実施した。

- 日時：11 月 10 日 (金) 18:10 ～ 19:40
- 場所：494、495 教室
- 対象者：本学の 1 年生
- 参加人数：32 名

当日は「ModoLuca」に実装した 5 題のうち、「Leibniz の公式」、「Maclaurin 展開」、「L' Hôpital の定理」に関する 3 題を選び使用した。参加者には、まずはじめに「Leibniz の公式」の問題を普段通りの学習方法で解答してもらった。その後、一度解答を中断してもらい、「ModoLuca」の使用を促した後、再度解答を続けてもらった。

プロジェクトメンバーは、チューターとして「ModoLuca」の使用をサポートしたり、促したりした。また、解答の進捗や「ModoLuca」を使用している様子を観察し、気になったことがあればメモをとった。

図 3.8　勉強会の写真

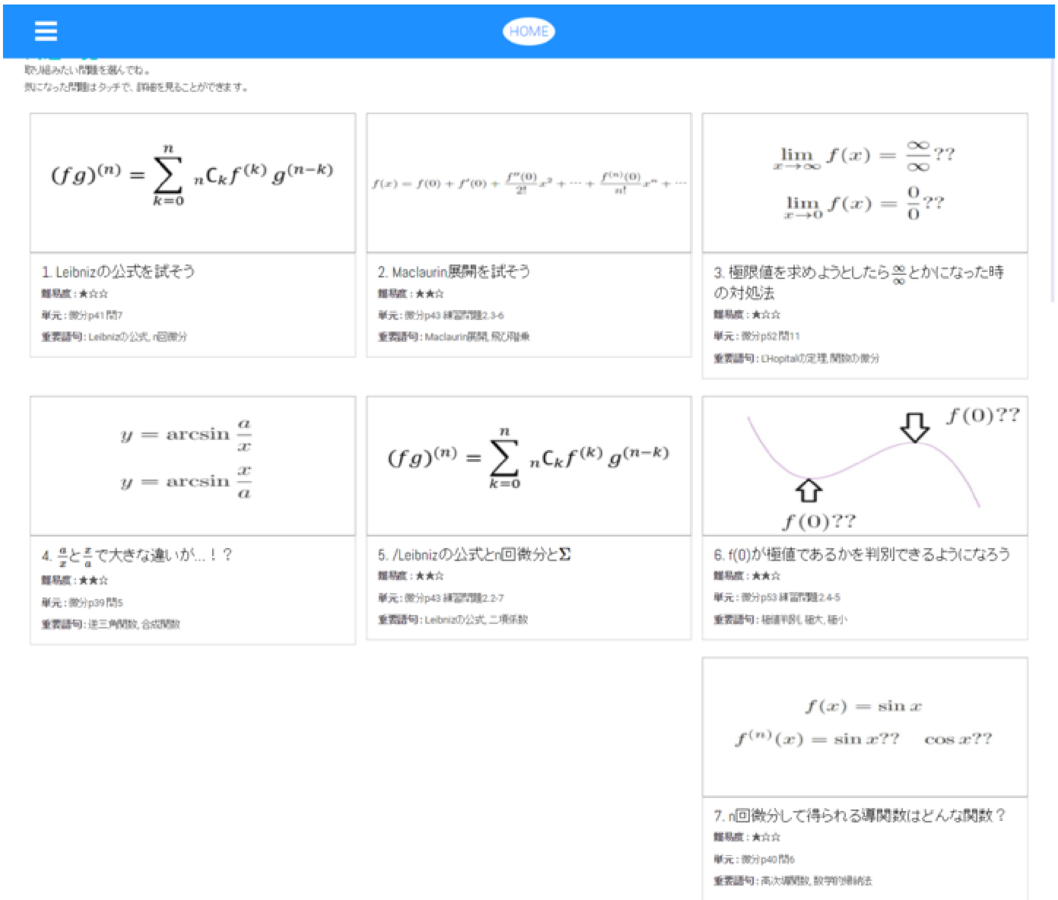


図 3.9　問題の画像

勉強会の前後では、「ModoLuca」によって学習者の意識がどのように変化したのかを調査する目的でアンケートをとった。

（※文責: 戸坂俊平）

3.5.2　結果

勉強会後のアンケートとフォローアップアンケートで得られた結果を 5 つに分けて順に述べる。なお、前項で述べたとおり、勉強会の参加者は 32 名であった。

結果 1

勉強会後におこなったアンケート「教科書で定義や定理を振り返る学習方法を知ることができましたか？」の結果は図 3.10 である。

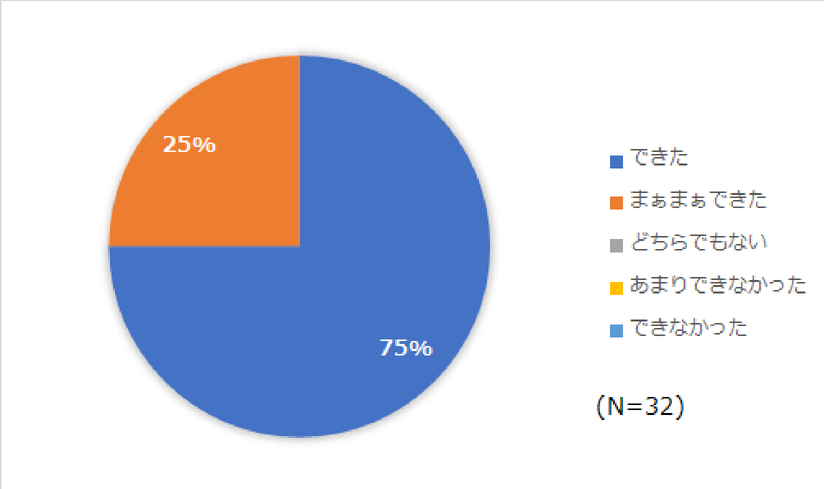


図 3.10　「教科書で定義や定理を振り返る学習方法を知ることができましたか?」のアンケート結果

「教科書で定義や定理を振り返る学習方法を知ることができましたか？」という勉強会後のアンケートの質問に対して、回答者 32 人のうち 24 人 (75%) が「できた」、8 人 (25%) が「まあまあできた」と答えた。選択肢は 5 つあったが、参加者全員が「できた」か「まあまあできた」と答えた。

結果２

「アプリのよかった点を教えてください」という勉強会後のアンケートの質問に対しては

- わからない箇所に対して、教科書のどこを読めば良いのかがわかる点 (16 人)
- わからない場合、どこまで振り返ればよいか明確になる点 (3 人)
- 教科書を読むきっかけになったこと (2 人)
- 単元の繋がりが見えた点 (1 人)

などの意見があがった

結果３

フォローアップアンケートに対して、32 人中 11 人が回答した。その 11 人中「ModoLuca」を勉強会後に利用したと答えたのは 6 人だった。この内訳は以下である。「解答はわかりやすかったか？」という質問に対して、4 人が「わかりやすかった」と 2 人が「まあまあわかりやすかった」と答えた。その理由として、

- 丁寧に解き方が書かれていたから
- 説明が丁寧だと思いました
- コメントが書かれているため
- コメントがわかりやすかったから
- 見やすかった
- 見やすい

などの意見があがった。

結果４

勉強会後のアンケートの「アプリの問題点・改善点を教えてください」という質問に対して次のような回答があった。

- 教科書を見てもわからなかったときに対応できない点 (6 人)
- 教科書に書いてある定理の使い方や解答の記述方法を教えてくれない点 (2 人)
- 計算ミスで行き詰まった時の解決策がない点 (1 人)

結果５

チューターのメモから次のことがわかった。

- 教科書の参照ページがわかっても、教科書の内容を理解できていない参加者がいた
- 教科書から公式を書き写すだけで、公式の使い方がわかっていない様子が伺えた
- 記述方法をわからない参加者がいた
- 計算で手が止まっている参加者が多かった

（※文責: 大島洋明）

3.5.3 考察

前項で述べた結果１、結果２より、「ModoLuca」は教科書を “読む” ことを促し、支援することができたと言える。これは、本グループが作成したデータベースの情報により正しい位置に戻って “読む” 経験をさせることができたからだと考えられる。

サンプル数は少ないが、結果３より、良い解答を作成できたと考えられる。我々は、１つの模範解答を作成する際に、複数人のメンバーで解答を作成し、様々なパターンの「つまづきポイント」を発見することで、解答を参考にする人が、自分がわからないポイントが明確になるような解答を作成できたのではないかと考えられる。この結果より、「ModoLuca」を勉強会後に使い続けている参加者がいるのは、ユーザーにとって有意な解答を作ったためとも推測される。

結果４は、ユーザーからあがった「ModoLuca」に対しての主な問題点 · 改善点について述べたものである。最も多くあげられた問題点 · 改善点は「教科書を見てもわからなかったときに対応できない」というものだった。我々が「ModoLuca」を通じて身に着けてほしい勉強方法は、教科書を見てもわからなかった場合、そのページよりも前に戻って読んでもらうという勉強方法である。しかし、今回我々が開発した「ModoLuca」では、推奨された勉強方法の一部分を実装することを目標としており、あくまでも「教科書を参照してもらうきっかけを作ること」を目標としていた。よってこの意見は本アプリの目標に合致していないため、反映しないものとした。そこで「ModoLuca」の改善は問題数の増加についてと、システムについてのみ行うものとした。また、システムについては本報告書では触れておらず、実装班報告書に記載されている。

結果 4 と結果 5 より、新たな知見として、本学の 1 年生に対して次の 4 つの問題点をあげることができた。

- 教科書の読む箇所がわかってもそこに書いてある内容を理解できない
- 解答の記述方法がわからない
- 公式や定理をうまく使えない
- 計算力が不足している

我々は、このことについて深く考える必要がある。また、これらの 4 つを解消することが今後の本プロジェクトの課題になり得る。

（※文責: 馬場鯨介）

3.6 成果発表会

成果発表会とは、各プロジェクトの最終成果について発表する場である。本節では、まず、成果発表会に向けて我々がどのような準備をしたのかを述べる。次に、発表評価シートによって得られた結果と、それについての考察を述べる。

（※文責: 鍋田志門）

3.6.1 準備

成果発表会に向けて、スライドとポスターの準備が必要であった。そのため、スライド班とポスター班に分かれて活動を行った。

スライド班では、成果発表会に使用するスライドを作成した。まず、スライドを作成するために骨組みを作成した。骨組みをもとにスライドを作成したが、教員・メンバーによるレビューを生かすことができず、満足のいくスライドを作れなかった。そのため、スケジュール通りの活動はできなかった。しかし、発表練習と並行してレビューと修正を重ね、スライドは当日に完成した。また、手の空いたメンバーが発表評価シートの作成も担当していた。

ポスター班では、メインポスターとサブポスターを各 1 枚ずつ作成した。スライドの内容と齟齬のないポスターを作成するため、まず、スライド班と内容の擦り合わせを行った。その後、各ポスターの文面やレイアウトなどを考えていたが、作業が難航したため大幅にスケジュールから遅れてしまった。メインポスター・サブポスターともに完成したのは当日の朝になってしまったが、昼に印刷を行い、発表に間に合わせることができた。

（※文責: 田谷花乃子）

3.6.2 評価シートの結果および考察

成果発表会では、前半と後半にメンバーを分けて、それぞれ 2 名で 3 回ずつ、計 6 回の発表を行った。その際に、聴講者に対して発表評価シートを配布し、記入してもらった。

発表評価シートの項目は発表技術と発表内容に対して、1（非常に悪い）から 10（非常に優秀）の 10 段階評価と、自由記述によるコメントを記入してもらうというものである。さらに、本プロジェクト独自に 3 つの質問を追加したものがある。以下に、その 3 つの質問事項を記載する。

- 「ModoLuca」を使用したいと思いますか
- 「ModoLuca」に追加してほしい機能、改善してほしい機能はありますか
- 数学を学習する際にどのようなサポートを受けたいですか

成果発表当日は、学生と教員あわせて 93 名の評価を受けた。項目ごとに記入がされているものを有効票、記入がされていないものを無効票とした。

発表評価シートを集計した結果、発表技術についての評価の平均は 8.59(有効回答数 N=93、標準偏差 SD=1.09)、発表内容についての評価の平均は 8.50（有効回答数 N=86、標準偏差 SD=1.14）であった。「『ModoLuca』を使用したいと思いますか」という項目は 1（思わない）から 5（思う）

の 5 段階評価で回答してもらった。評価の平均は 4.26（有効回答数 N=50、標準偏差 SD=1.02）であった。また、自由記述で得られたコメントを項目ごとに以下の表 3.1 にまとめた。

- 発表技術
  - プレゼンがとても聴きやすい 話の順番が明確で分かりやすかった
  - 声もよく出ているし、スライドもよくできています。内容がよく理解できました
  - アプリのデモが見辛かった。 ディスプレイが小さい。実機を使い、自分で操作して見たい
  - 発表が一本調子でどこが重要なのか分からなかった

- 発表内容
  - ネットで学習している人が多いので、スマホで使えるのはすごくいいと思いました
  - 勉強法の中でも対話形式のものは抵抗が無く理解しやすいと感じた
  - 数学を勉強する上で「どこでも」を意識する必要があるのか
  - ModoLuca が必要なくなる過程、その後へのビジョンがほしい

- ModoLuca に 追加してほしい機能改善してほしい機能 はありますか
  - 数学以外もつくったらどうなるかきになります
  - 図形やグラフの動きが見られるシステムがあるともっと分かりやすい
  - 間違った問題の類似問題を出してくれる機能
  - 「うーんわからん」のユーザーのフィードバックを受けることで、ユーザーがつまずきやすいポイントのデータを集めることもできると思った

- 数学学習をする際にどのようなサポートを受けたいですか
  - 分からない所を教えてくれる
  - 自分はどこが分からないのかを分かるようになれる支援
  - 「この分野を勉強するならこの本いいよ」というすすめ
  - 実際に対人のサポートがほしいと思う

発表技術と発表内容の平均点はそれぞれ「8.59」と「8.50」だった。技術面、内容面ともに 8 割を超える評価を得ることができた。しかし、発表技術に関する自由記述では、「ディスプレイでのデモが見にくい」、「実際に『ModoLuca』に触れてみたい」といったような意見が多く寄せられた。これは、事前にディスプレイでのデモ発表が効果的に行えるか、検証を行っていなかったことが原因だと考えられる。さらに、「ModoLuca」に触れられる体験スペースを用意していたが、聴講者に体験スペースが認知されていなかったことが原因だと考えられる。

発表内容に関する自由記述では、「ネットを利用して学習している人が多いのでスマホで使えるのはありがたい」といったような意見が多く寄せられた。2016 年度の成果物の売りの 1 つであるスマホ対応は有効なものであったと考えられる。また、チャット形式の勉強方法に好印象を抱いているという回答が多くあったため、これまでにないチャット形式の学習支援ツールを作成したことは、ユーザーにとって好印象だったことが明らかになった。

次にプロジェクト独自で追加した、3 つの質問項目に対しする解答について考察を述べる。

まず 1 つ目の項目「『ModoLuca』を使用したいと思いますか」という質問について、平均点 4.26

と高い評価を得ているのでユーザーにとって有用性のあるなものが作れたと考えられる。

2 つ目の項目「『ModoLuca』に追加してほしい機能はありますか」では、「数学以外の科目にも対応してほしい」、「類似問題を増やしてほしい」というような意見が多くあった。本アプリのコンセプトは教科書を“読む”学習方法を身に着けてもらい、正しい学習方法をユーザーに定着させることである。教科書を“読む”学習方法が身につけば、他の科目を実装する必要はないと考える。「類似問題を増やしてほしい」というような意見も同様に、正しい学習方法さえ身につけば類似問題を本アプリで実装する必要はないと考察した。

「『ModoLuca』を使ったユーザーからフィードバックを受ける機能を追加してほしい」という意見に対しては、フィードバックを受けることで、さらに「つまづきポイント」がわかるようになると考えられるため、追加すべき機能として検討する必要がある。

3 つ目の項目、「数学を学習する際にどのようなサポートを受けたいですか」という質問では、「わからないところを教えてもらいたい」、「つまずいた場所の解説が欲しい」などの意見が得られた。我々のアプリはユーザーのわからない場所や「つまづきポイント」を分析し、それに応じた教科書のページに戻ってもらうことをコンセプトとしていたため、ユーザーにとって有用なアプリを開発できたのではないかと考えられる。しかし、「類似問題を実装してほしい」、「おすすめの参考書を教えてほしい」などの意見も存在していたため、ユーザーのニーズと自分たちが提供したかったものに多少のずれも存在していたのではないかと考える。反省点として、ユーザーのニーズをもっと考慮する必要があったことがあげられる。

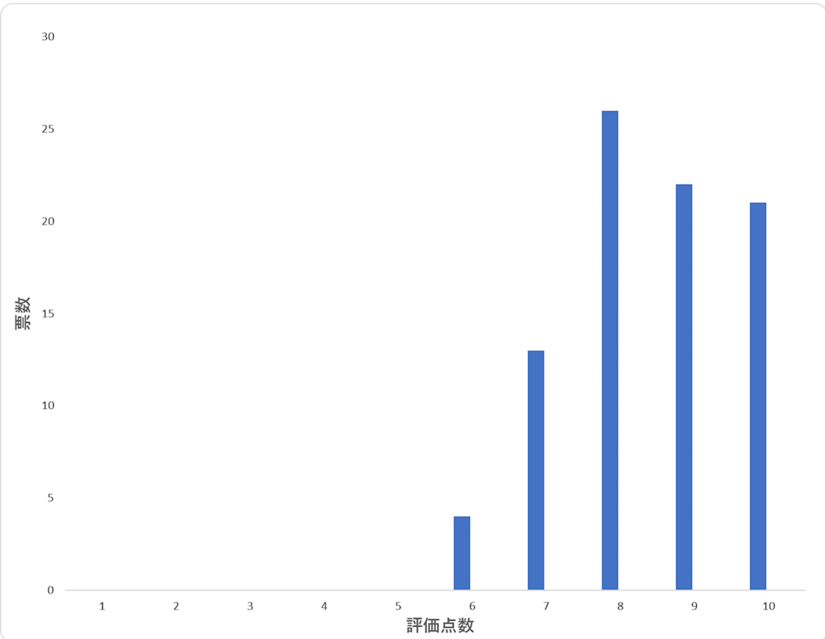


図 3.11　成果発表会発表内容度数分布図

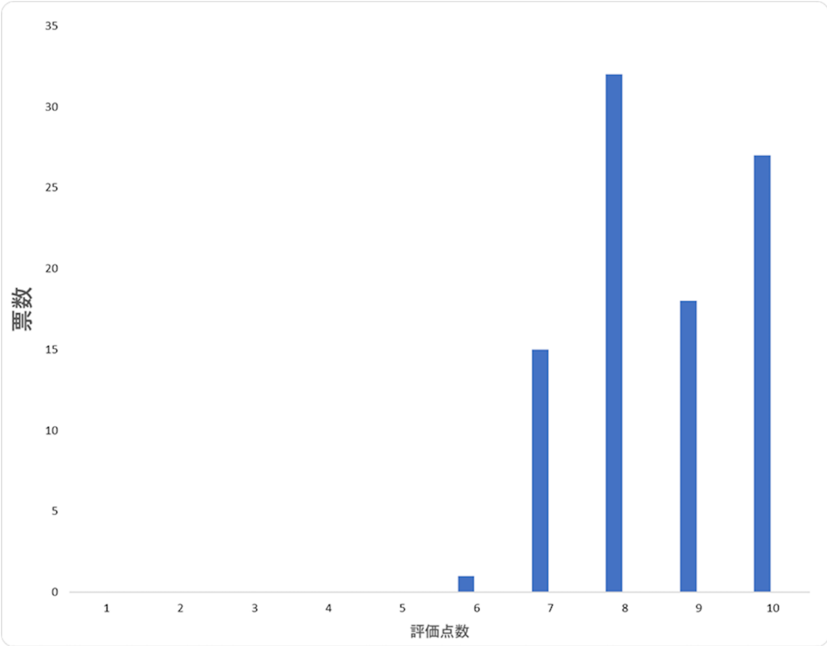


図 3.12　成果発表会発表技術度数分布図

（※文責: 馬場鯨介）

第 4 章　今後のまとめと展望

本プロジェクトは「昨年度あげられた問題を解消しつつ、本学の 1 年生により効果的に数学を学んでもらうための e-Learning サービスの作成」を目標とした活動を行ってきた。

まずは、我々自身の数学の理解を深め、学習者に誤った知識を与えることのないようにするため、プロジェクト内学習会を行った。そこでは、用語を正しく理解することは重要であるということと、そのためには「教科書を “読む”」ということが重要であるということを発見した。

我々は、この 2 点ができていなかったために、数学学習に問題があったことがわかった。そして、1 年生にも同様の問題点があると仮説を立て、その検証のために解析学 1 勉強会を実施した。その結果、1 年生は我々と同じく、教科書を正しく “読む” ことができていないということがわかった。そこで、本プロジェクトでは、学習者に対して教科書を “読む” ことを促し、支援する e-Learning サービスの作成を目標とし、これを果たすため e-Learning サービス「ModoLuca」を作成した。その中で、我々は「ModoLuca」のコンテンツ部分を担当し、主に以下の 3 つの活動を行った。

- 問題を解く上でのつまずきポイントの作成した。
- 数学の用語や定理同士のつながりのまとめた。
- 模範解答の作成した。

そして、この「ModoLuca」が目標を達成しているかを検証するため「解析学 II 勉強会」の中で 1 年生に「ModoLuca」を使用してもらい、アンケートに答えてもらった。その結果、「ModoLuca」は教科書を “読む” ことを促し、支援することができたことがわかった。さらに、フォローアップアンケートの結果から、理解しやすく正しい模範解答を作成できたと考えることができる。

しかし、勉強会後のアンケートとチューターがとったメモから、「ModoLuca」のコンテンツについての問題点や改善点があげられた。最も多くあがったのは、「教科書を見てもわからなかったときに対応できない」というものであった。しかし、我々はあくまでも「教科書を参照してもらうきっかけを作ること」を目標として、「ModoLuca」を開発した。したがって、この意見は「ModoLuca」の目的の範疇ではないため、反映しないものとした。よって、「ModoLuca」の改善は問題数の増加についてと、システムについてのみ行うものとした。なお、システムについては本報告書では触れておらず、実装班報告書に記載されている。また、勉強会の結果から新たな知見として、本学の 1 年生に対して次の 4 つの問題点を発見した。

- 教科書の読む箇所がわかってもそこに書いてある内容を理解できない
- 解答の記述方法がわからない
- 公式や定理をうまく使えない
- 計算力が不足している

我々は、このことについて深く考える必要がある。また、これらの 4 つを解消することが今後の本プロジェクトの課題になり得る。

さらに、e-Learning サービスの構築のほか、メタ学習ラボとの連携した活動を視野に入れ、より効果的な数学学習支援に繋げることを考えている。

（※文責: 田谷花乃子）

第 5 章　グループ内インターワーキング

本章ではプロジェクトメンバーが各自で内省したものを記述する。プロジェクトメンバーが割り当てられた課題を解決する際にどのように解決したのか、メンバーが連携して行った作業の内容について述べる。

（※文責: 鍋田志門）

5.1　大島洋明

私が　このプロジェクトを通して学んだことが二つある。「詳細アウトラインの作成」と「メンバー同士でプレビューし、コメントしあうこと」の重要性である。

最初にアウトラインの作成について述べる。文章を書きだす前にアウトラインを作成することは、報告書作りやインターワーキングの作成時に役に立った。それまでの私は、文章を作成する時　事前にあらすじや骨組みなどは全く考えず、書き出していた。つまり、思いつくまま筆を走らせている状態だった。前期、講堂でメンバーや先生方全員の前で私の書いた文章が初プレビューされた。その結果、先生方にとって突っ込みどころ満載の私の支離滅裂な文章は、良い意味で悪い書き方の見本として公開され次々と指摘を受けた。恥ずかしいことではあったが後悔はなかった。むしろ、自分の書き方を見直す良いきっかけになった。後期、報告書を作る際、メンバーが完璧な詳細アウトラインを作成した。私は、このアウトラインを読み込み、内容に従って書いた。もし、この詳細アウトラインが無ければ私は報告書をスムーズに書き上げることができなかった。前期に続き、後期でもアウトラインの重要性を痛感した。また、最終発表のスライド作りでも、アウトラインの作成をしておくとその後の作業がスムーズに運ぶことも学んだ。詳細アウトラインについては大学一年次のリテラシーの授業で学んだ。にもかかわらず、私は詳細アウトライン化することが多少面倒くさく感じ意識的に避けていた。しかし、今回のプロジェクトを通し、詳細アウトライン化の重要性を体験した。まだまだ完璧に書き出せないが、少しずつでもよいので詳細アウトライン化に挑戦してみようという気になった。

次にメンバー同士のプレビューやコメントしあうことについて述べる。メンバー同士で書いた文章に対してコメントしあう内容を見て、私には気が付かない着目点が沢山あることを知った。今までの私は、自分が書いた文章について読み直す、推敲する意識が少なかった。自分自身で書いているので違う目線で読み直す余裕がなかった。しかし、メンバーは主語と述語のねじれなど冷静に指摘していた。私には全く見えていなかった箇所が沢山あった。これは自分に欠けていた部分である。是非これはマネをしたい。

今回のプロジェクトを通して私は詳細アウトラインの作成とメンバー同士でプレビューし、コメントしあうことの重要性を認識した。プロジェクト活動が終わっても、この二つに関しては意識して忘れないようにしたい。

（※文責: 大島洋明）

5.2 大河原昂也

数学は、本学で興味を持った学問の 1 つである。数学を学べるということで、本プロジェクトに興味を持ち、参加した。

前期にプロジェクトメンバーの数学学習の問題点を把握するプロジェクト内学習会を開催した。その学習会で、今まで気が付かなかった自身の数学学習の問題点を見つけることができた。その問題点とは、数学用語を理解せず解答を行っているというものだ。数学用語がわからないと、記述に誤りが生じたりする。数学の問題を解くことは、パズルを解くことによく例えられる。1 つ 1 つのピースを組み合わせることで、パズルを完成させる。数学の問題も 1 つ 1 つの考えを組み合わせて、正解を導き出す。数学用語がわからない状態で解答を行うことは、ピースが足りない状態だったり、壊れたピースを無理やりつっこんだ状態をパズルの完成としているようなものである。先程述べた学習会で、自分がまさに、ピースが足りなかったりするにもかかわらず、それをパズルの完成と思いこんでいるような状態であることに気づかされた。

さらに、その学習会で、教科書を使わずに、事実だけが述べられたインターネットなどを参考にし学習しているという学習方法の問題点も明らかになった。その学習方法は、自分が行っていたものであった。そして、それは数学用語を理解せずに解答することの原因であると推測される。この悪しき学習方法を改善するため、今までの学習方法をやめ、教科書を“読む”という学習方法に切り替える必要があると考えた。この方法は、高村先生の助言等によって見つけることができた。また、教科書を“読む”ということは、数学用語の的確な理解につながるため、厳密に数学を学べると考えられる。

この学習方法を後期のコンテンツ班内学習会にて実際に試みた。この活動は、グループメンバーで数学の学習を行うものであり、「ModoLuca」のコンテンツの作成準備としての位置づけだった。この学習会で解いた問題の 1 つに「$f(x) = xe^x - \sin x - x^2 - \dfrac{2}{3}x^3$ の $x = 0$ における極大 · 極小を調べよ.」という問題があった。この問題の解答を試みた。増減表を書いたりして、何とかあがいてみたが、全くだめだった。そこで、教科書を参考にすることにした。ページを遡ってみると、ある定理に目が入った。その定理は、「開区間 I 上で f は C^n 級として, 点 a において $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0 (n \geq 2)$ であるとする. (i) n が偶数で, $f^{(n)}(a) > 0 (< 0)$ ならば f は a で極小 (大) となる. (ii) n が奇数なら, f は a で極値をとらない.」といったものである。この定理を利用することで、任意の数に対しての関数の極値判定を行うことができる。しかし、この定理をいきなり使って解答することはしなかった。なぜなら、この定理のはじめに「開区間 I 上で f は C^n 級として,」ということが書かれていたからだ。つまり、開区間 I 上で f は C^n 級でなければ、この定理を使用できないということだ。しかし、この箇所を見たとき、C^n 級の意味がわからなかった。そこで、C^n 級関数という用語を教科書で調べることにした。すると、教科書には「n 次導関数 $f^{(n)}$ が連続である関数 f を C^n 級という.」と記載されていた。したがって、先程の定理を当てはめるために $f(x) = xe^x - \sin x - x^2 - \dfrac{2}{3}x^3$ の n 次導関数が $x = 0$ を含む開区間で連続であるかどうか調べる必要が出てくる。これをもとに解答に移ろうとして、先程の定理を読み進めると、疑問に思う箇所を見つけた。それは、定理の「点 a において $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0 (n \geq 2)$ であるとする. (i) n が偶数で, $f^{(n)}(a) > 0 (< 0)$ ならば f は a で極小 (大) となる. (ii) n が奇数なら, f は a で極値をとらない.」という部分である。なぜ、このようなことがいえるのかわからなかった。そこで、教科書を“読む”ことにした。時間を書け、“読む”ことで、先程の定理の根拠を理解することができた。そのため、

問題にとりかかることができ、この定理を用いて、解答を完成させた。このようにして、教科書を“読む”ことを実践した。この学習方法を実践することで、教科書を“読む”ことは数学の厳密な理解につながることを身をもって理解した。

それだけでなく、この学習方法の実践により、別のことにも気づいた。それは、教科書の文を理解するために時間と根気を必要とするということである。私自身、先程の定理を理解するために四苦八苦しながら、教科書を読み込んだ。実際に、その定理の理解に 3、4 時間要した。この実体験にあるように文を正確に理解するためには時間が必要である。さらに、根気も必要としているため、数学を理解することに意欲的な人でなければ、到底続かない学習方法であると思われた。さらに、本学の 1 年生には、「教科書の読む箇所がわかってもそこに書いてある内容を理解できない 」という問題があると、3.5.3 で考察した。この考察は、先程の述べた教科書の内容を理解するために時間と根気が必要であるということと関係のある事柄だと私は思う。教科書を“読む”ということには、教科書の行間を埋める能力が問われており、時間と根気が必要となってくる。先程の考察より、多くの 1 年生は、その能力が不足している現状だと推測される。このことから、1 年生に“読む”という学習方法を実践させるならば、時折、教科書の理解の補助を行う必要もあると推測される。

以上に述べたとおり、本プロジェクト活動で、教科書を“読む”という学習方法を見つけた。さらにそれを実践することで、その学習方法が数学の厳密な理解に役立つことを理解した。そして、1 年生の必要とする学習支援方法についてさらに深く考えることができた。

（※文責: 大河原昂也）

5.3　鍋田志門

前期は全員で行う活動が多かったが、中間発表会に向けた準備では「フォローアップアンケート班」としてグループ活動も行った。プロジェクト内では初めての共同作業だったが、メンバー同士よく議論して、効率よく作業できたと感じる。私は、オンライン上で実際にアンケートフォームを用意したほか、他のメンバーの進捗を把握して、必要に応じてサポートできた。

中間発表会では発表者を務めた。発表に用いる資料の完成が遅れたことで、練習期間が短くなってしまったが、本番では堂々とした発表ができた。また、発表後に次々と寄せられた質問にも積極的に答えられた。

後期の活動では主に開発作業や報告書執筆作業を行った。開発作業において、私はアプリ内で扱われる数学の問題の模範解答作成や、単語の抜き出しを行った。前期で身に着けた教科書を“読む”力を十分に生かし、模範解答作成に取り組むことができた。模範解答作成や単語の抜き出しでは、他のプロジェクトメンバーと協力し作成することで、より精度の高い解答を作成するだけでなく、グループワークの進め方や、周りとの意見交換の有用性について学ぶことができた。報告書の作成ではエディターの役割を担当することで、相手に自分の意図したことを伝える力を身に着けることができた。また、報告書執筆にあたり、文献を読む能力や、文章の章立ての方法について学ぶこともできた。

（※文責: 鍋田志門）

5.4　田谷花乃子

私のプロジェクト活動での個人的な成果はいくつかある。

まず、数学をはじめとした、学習方法の変化である。それまでは、教科書に書いてあることを精査せずに問題を解き、答えが合えば「わかった」と思っていた。しかし、このプロジェクトを通し、それが如何に薄い学習であるかを学んだ。教科書を精読し、わからない部分があれば戻って学習する。それまでも、わからないところは調べていたつもりだったが、私はこのプロジェクトに参加してから、それまでの学習方法では不十分だったと気づくことができた。このプロジェクトを選んだ当初に思った、「わかる、とはどういうことかを知りたい」「わかる、というプロセスを知りたい」という目標に近づくことができたと感じている。

次に、共同作業やグループワークについてである。Communication やほかの講義でグループワークをすることはあったが、通年で同じメンバーと作業するのは初めてだったので、新鮮であった。そのなかで、グループワークの難しさを実感した。自分は、班のリーダーやそれに準ずるような働きをすることが幾度かあった。単純なタスクの分配であっても、思った通りの成果がでないことがあった。何をするのか、いつまでにやるのかをはっきり強調して伝え、メンバーとこまめに連絡をとることで、モチベーションを維持する役割も、リーダーには求められるのだと理解した。しかし、自分自身のタスクもあるなかで、欠かさず連絡をとり続けるのは、案外難しいものだとわかった。それに気づいてからは、自分がリーダー的役割を担っていないときでもレスポンスをとるように意識した。また、最低限の働きしかしないこともあったが、それでは良いものはできないと思い、自ら他の人のサポートをしたり、予定外のタスクにも柔軟に対応するように心がけた。今後も、共同作業を行う機会はあると思うので、そのときには今回学んだグループワークについて気を配るべきことを心に留め置いておきたい。

最後に、2 つ新しい技術を身につけた。1 つは、 LaTeX での文書作成技術である。コンテンツ内で使用した模範解答を作成するために習得した。初めて使用するものだったが、模範解答を作成しながら順調に学ぶことができた。卒業論文執筆の際に活かしたいと思う。2 つめは、Illustrator でのポスター作成技術である。これについては、前期に行った中間発表でのポスター作成のタスクが 1 人に偏ってしまったことを反省し、自分の課題として設定していたことなので、達成できたことを嬉しく思う。ポスター作成のタスクが自分に振られる予定はなかったが、事前に書籍などで使い方などを学んでいたことが効果的だったと思いたい。

（※文責: 田谷花乃子）

5.5　馬場鯨介

私は後期の活動から学んだことが 3 つある。1 つはグループワークの難しさである。我々のプロジェクトは 15 人のメンバーが在籍しており、各自それぞれの意見を持っている。相手の意見を尊重しつつ、自分の意見も聞いてもらうことはとても難しいことだと痛感した。メンバーからの意見を吟味し、自分の中で有用な意見とそうでない意見を取捨選択する能力を身に着けることができた。

2 つ目はスケジュール管理の大切さである。プロジェクト活動内で「時間が足りない」、「提出していない人がいる」などの問題が頻繁に起きた。これはメンバー間でのスケジュールや定められた

提出期限をきちんと守るという意識が欠落していたことが原因ではないかと考えられる。時間が足りなくなるとクオリティは落ちてしまうし、提出期限を守らないと他のメンバーに迷惑がかかってしまう。スケジュール管理をすることはグループワークを進めていくうえで、とても重要なものだと学ぶことができた。

3 つ目は、文章を書くことの難しさである。これまで私は文章を書くときに他人に読まれるということをあまり意識していなかった。文章を書くときには簡潔に相手にしっかり伝わるように書く必要がある。自分では完璧な文を書いていたつもりでもピアチェックを行うと、自分の文章がどれだけ他人が読むことに対して配慮がなされていないかをわからされた。文章を書く際には、誤字脱字がないか、一文一義になっているか、他人が読んでもしっかりと内容が通じるのか、などの観点をしっかり意識して書けるようにしていきたいと感じた。また、複数人で文章を作成する機会は少ないので、良い経験になった。周りのメンバーと統一事項を決め、しっかり打ち合わせを行うことの重要性に気が付くことができた。

（※文責: 馬場鯨介）

5.6　古屋敷匠

この 1 年間のプロジェクト学習を通して気づいたことが 2 つある。

1 つ目は、数学の学習方法についてである。プロジェクトの最初に行ったプロジェクト内学習会にて大きな発見をした。そもそも自分は解析学 I の教科書は略解さえ理解できればいいと思っていた。実際に私はそれで単位をとれていたのでそれが正しい勉強法だと信じて疑わなかった。1 年次に教科書を読めと何度も言われてきたが、略解を読んで解答をかけるようになることが教科書を読むということだと勘違いをしていた。学習会前までは、教科書の問題や例題のみを参考にして問題に合いそうな部分をコピー＆ペーストして解答しており、定義などが書かれた部分は書いていることが難しく理解しづらいという理由で一切参照してこなかった。しかし、プロジェクトメンバー全員で教科書の読み方を発見した結果、教科書に載っている定理などが理解できるようになっていった。それに伴い、自分が解析学 I で理解しているつもりになっていた内容に関して、解析学 I の単位をとったにもかかわらず、定理や定理を半分も理解していない状態だったことが分かった。大学の教科書が少しでも、読んで理解できるようになったことがとてもうれしく、教科書を読むのが少し楽しくなった。教科書で調べながら問題を解いていくうちに、教科書の書いている内容や該当ページがすぐにわかるようになっていき、教科書の内容が定着していくのを感じることができた。今まで大学の教科書は難しいと思って、教科書を高いお金を払って買ったにもかかわらず、1 回も開かないで他人にあげてしまっていた。しかし、学習会をきっかけに大学の教科書をきちんと読んでみようと思った。簡単で見やすいと思っていた高校の教科書でも、こんなこと書いていたのだと思ったことが何箇所もあり、簡単な内容ですらきちんと読めていなかったのだなと実感した。また、学習会の際、参考にしたものや解いている最中に疑問に思ったことを解答の端に書いておくという行為がほかの授業にとても役に立った。質問したい場所が明確になり、ノートなどを見直した時に授業の内容がすぐに思い出せるようになった。

2 つ目はグループワークの大切さについてである。この 1 年間で本当のグループワークというものを体験できたと思う。これまでは、コミュニケーションの授業や VEP などでグループワークを行なってきた。しかし、その時は短期間でのグループ活動だったので、最悪誰か一人がやればそれ

で済む内容がほとんどであった。このようなグループワークしかやってこなかった私にとってプロジェクト学習は初めての本格的なグループワークとなった。グループワークで重要なものは、いかに相手に自分の意見を伝え、相手の意見を正しく理解できるかである。これが、なかなか難しかった。なかなか相手に自分の意図が伝わらなかったり、相手の意見の意図がまったくわからなかったりもした。その度に、メンバーと衝突し、議論が長引くきっかけとなってしまった。しかし、自分以外の意見を聞くことの大事さも同時に気づくことができた。「この人は、こう思うのか。」とか、「こういう意見もあるのか。」という新しい意見を聞くことができそこから「なら、こうした方がいいんじゃない。」という新しい発想が出てくる。これが議論というものなのだと理解した。

（※文責: 古屋敷匠）

5.7　須貝奎哉

私は後期のプロジェクト活動を通して、自分の書いた文章をもう一度声に出して読むことの重要性やスケジューリングの重要性について学んだ。後ここからは、期の活動で得られたことと、今後の展望について述べる。

後期の前半はコンテンツ班に所属していた。沢山勉強したはずである 1 年後期の解析学だが、2 年も経てばほとんど思い出せなくなるくらい忘れていた。そこで、教科書を読み、マックローリン展開や、ロピタルの定理とは何だったのか、確認することから始め、実際に自分に割り振られた問題を解き、模範解答を作成した。数学的なことはもちろん、それを説明する日本語に苦戦した。この班の活動から、数学的な知識はもちろん、自分で書いた文章を実際に声人出して読み、自分の目だけでなく、耳で聞くことで、より文章の間違いを発見することができると学んだ。それだけでなく、Tex の使い方なども学び、身につけることができた。

次に、私はポスター班に所属した。成果発表会までの期間が短い中、スケジュールをしっかり立てずに作業を行ってしまったため、結局完成したのは成果発表会の当日の朝であった。このことから、グループワークを行う際、すぐに作業に取り掛かるのではなく、時間をかけてでも最初にスケジュールを班員全員で考え、全員で危機感を感じることも大切なことであると学んだ。

成果発表では、私は発表者であった。何度も発表練習を重ね、本番は納得のいく、いい発表ができた。本番は緊張すると思っていたが、練習のおかげで自信をもって本番に臨むことができたため、あまり緊張はしなかった。このことから、しっかり、事前準備を行うことで、自信を持った行動をおこなうことができ、緊張を軽減できることがわかった。しかし、質疑応答に対する練習はしておらず、きわどい質問に対し、あたふたしてしまうこともあった。質疑応答は発表練習以上に時間をかけて行うべきであることも学んだ。

プロジェクト活動はこれで終わるが、この活動を通して得られた失敗や教訓を、卒業研究や、就活で発揮していきたい。

（※文責: 須貝奎哉）

5.8 戸坂俊平

後期、私はコンテンツ班のメンバーとして数学の問題に向き合った。主に班内の学習会やModoLucaに必要な解答・解説の作成に取り組んだ。もともと数学が得意で自信もあったため、これらの活動も問題なく取り組めると思っていたが、予想以上に苦労した。これらの活動は、ただ問題を解くだけではなく、システムに組み込みやすいこと、学習者の役に立つような内容であることが求められていたので、今まで経験したことがないような難しいものだった。自分の中でどんなに分かりやすく記述しても、受け取る側が分からなければ意味がなく、教員やメンバーと相談して何回も作業を繰り返すことになったが、良い経験になったと思う。また、「つまずきポイント」を考える作業では、他のメンバーから様々なヒントを得ることができた。自分では思いつかないような考え方が多く発見でき、作業していて面白かった。何かに行き詰まった際には、他者との会話を通じて刺激を受けることも大切だと感じた。

成果発表会に向けた準備では、スライド班として発表資料を作成した。この作業には2つ反省点がある。1つは決められた期限までに完成させることができなかった点である。これは、スケジュール管理が甘かったことが原因であった。それまでの活動でも、期限までに作業が終わらないことが何回かあり、スケジュール管理については散々言われてきていた。それにもかかわらず、時間に対する危機感を欠き、完成に遅れが生じてしまった。これによって他の班の作業にも影響が出てしまったことは、よく反省しなければならない。決められた期限内に何を行わなければならないのか、それを誰が何日の何時までにするのか、ということの確認を徹底し、今後このようなことがないように努めたい。

もう1つは、作業ごとの比重の見積もりを誤ったことである。ただでさえ時間が少なかった中、分析や議論にあまりにも時間をかけ過ぎ、肝心の資料作成にかけられる時間が短くなってしまった。たしかに、よく話し合って準備しておくことは大切なことであるが、実際の作成作業の方に時間をかけることも大切であった。作業内容ごとのバランスは的確に保たなければならないと感じた。

様々な困難があったものの、最後は他のメンバーが協力してくれてなんとか完成させることができた。自分の作業を差し置いて、優先的にサポートしてくれたので本当に助かった。1年間の活動を通して、他者との共同作業の難しさがよく分かった。議論の場では理解が進まず、積極的に参加できないことが多くあり、プロジェクトに役立つアイデアを提供することもあまりできなかった。しかし、怠惰な姿勢で授業に臨んだことはなく、自分の中でよく考えながら取り組むことができたと感じている。このプロジェクト学習で学んだことは、今後必ず役に立つと思うので、積極的に活用していきたい。

（※文責: 戸坂俊平）

付録 A　新規習得技術

TEX

解析学 I 勉強会の問題用紙、発表評価シート、模範解答の作成、グループ報告書などを作成するために用いた。

（※文責: 古屋敷匠）

付録 B　活用した講義

解析学 I、II

プロジェクト内学習会で数学の問題を解く際や、解析学勉強会にて問題や模範解答を作成する際に用いた。

科学技術リテラシ

報告書を記述する際のアウトラインや文章の作成に用いた。

（※文責: 古屋敷匠）

付録 C　相互評価

C.1　大島洋明による相互評価

大河原　大河原さんは、報告書作成時　私のエディター役をしてくれた。私が文章に詰まり相談したときは、素早くわかりやすく指摘、修正、指導してくれた。とても頼もしいエディターだった。また、優しく接してくれるので、安心して相談できた。また、大河原さんは 積極的に詳細アウトラインを担当してくれた。おかげで文章の繋がりも分かりやすく報告書を書く際とても助かりました。

鍋　田　鍋田さんは、自ら積極的に行動して班メンバーの見本を示してくれた。またタスクの処理の仕方、計画性をリーダーのように立ててくれたので安心して鍋田さんの指示に従うことができた。また、他の班とも積極的にコミュニケーションをとってくれ、周りの状況も教えてくれた。鍋田さんは、自分の意見をしっかり持っていて述べれる人なので、非常に心強い存在だった。

田　谷　田谷さんは、コンテンツ班のリーダーとして班全体を冷静によく見ていてくれた。また実装班と数学の問題とデータベースなどの折衝なども行ってくれた。勉強会後のアンケート結果から考察をするとき、私の手におえない量を担当してもらった。突然の依頼にもかかわらず迅速に作業をこなし、メンバーが仕事をしやすいように立ち振る舞ってくれた。田谷さんは、コンテンツ班にとても貢献してくれた。

馬　場　馬場さんは、積極的に周りのメンバーとコミュニケーションを取っていた。また、プレビューなどでコメントを求められると積極的に答えていた。馬場さんは、発表会に向けてのスライド作りにも労を惜しみなく取り組んでいた。自分のタスクだけでなく、他のメンバーの手助けも積極的に行っていた。また、会議でも積極的に参加し、しっかり自分の意見を発言していた。

古屋敷　古屋敷さんは、コンテンツ班の TeX の作業を担当してくれた。また詳細化アウトラインも担当してくれた。人一倍のタスクを抱えても、きちんと迅速に遂行していた。また他のメンバーの補助もするなど積極的に活動していた。会議でも積極的に発言し、グループ全体のことを考えて行動していた。責任感に溢れ班内だけでなくグループにも大変貢献していた。

須　貝　須貝さんは、ポスターや報告書の英訳部分を積極的に担当してくれた。また、須貝さんは、休日に自らプレゼンの資料を作りメンバーに今年の売りの部分をわかりやすく再認識させてくれた。成果発表会では発表者を務めてくれた。モニター画面のセッティングが間に合わない中でも、動揺することなく聴衆者に分かりやすい発表をしてくれた。責任をもって自分のタスクを全うしてくれた。

戸　坂　戸坂さんは、忙しい時でも嫌な顔せず資料からグラフの作成をすぐに何度も行ってくれて

頼もしかった。班内勉強会では数学の問題の別解も教えてくれた。また、報告書作成時に正しい言葉使い方を本で調べメンバーに教えてくれた。戸坂さんは、メンバーとコミュニケーションを取りながら積極的に自分のタスクに取り組んでいた。

（※文責: 大島洋明）

C.2 大河原昂也による相互評価

大　島　数学の模範解答作りに真面目に取り組んでいた印象がある。コンテンツ班の一員として、「ModoLuca」のコンテンツ作成に尽力していた。また、議論を行う際、たびたび意見を述べており、積極的な一面もあった。その積極的な姿勢は、私自身、見習いたいと思う。

鍋　田　最終報告書のアウトライン作成班で一緒だったが、非常に仕事ができる人間だと感じた。スケジューリングや活動の方針など、常に積極的に提示し、活動の舵取りを担っていた。そのおかげで、私自信迷いなく作業に集中できた。また、人の使い方もうまく各タスクに対して、適切にメンバーを振り分けることもできていた。そのため、作業が効率的に進む場面がいくつもあった。さらに、議論を行う際も常に発言者の意図を的確に読み取ることができるため、議論を円滑に進めることができた。行動力、人の使い方の上手さ、理解力 に秀でている人間と感じた。

田　谷　コンテンツ班のリーダーを務めてくれた。「ModoLuca」のコンテンツ完成へのスケジューリング、タスクの割り当てなど適切に行っていた。また、班員に積極的にコミュニケーションをとり、進捗状況の確認や作業へのアドバイスを行っていた。そのため、班としての仕事が円滑に進んだ。田谷さんなくして、コンテンツの完成はなかったと思う。

馬　場　スライド班の活動が停滞している中、1 人、気を張って活動していた。短い時間で、スライドのプロトタイプを完成させた。そこでみせた仕事の早さ、根気の強さは、間違いなく評価に値する。それだけでなく、献身的に仕事を行う場面もあった。それは、我々、最終報告書のアウトライン作成班がアウトライン作成に苦戦している際、別の班に所属していたにもかかわらず、手を差し伸べてくれた。そのおかげで、何とかアウトラインを期限内に作成することができた。

古屋敷　多少、理不尽なタスクにも文句を言わず、ひたむきに仕事をこなしていたり、他人から依頼された仕事にも快諾していた。真面目で懐の深い人間だと感じた。その懐の深さについつい甘えてしい、色々仕事を任せてしまった。その任せた仕事に対しても、手抜きをせずこなしていた。さらに、求めた以上のものを作り上げげたりと、質の伴った仕事を行っていた。

須　貝　模範解答作りを行う班で、一緒に活動した。ひたむきに解答を作成していた印象である。何度も高村先生に修正を食らう中、必死に喰らいつき、模範解答を完成させた。最終報告書作成においては、比較的書く量が多い中、期限内にきっちり書き上げていた。特に、概要の英訳は非常に大変なタスクだったと思うが、持ち前の英語力と生真面目さで仕上げくれた。

戸　坂　私同様、議論にたびたびついていけていないようだった。そのため、議論において発言をすることは少なかった。しかし、最終報告書の執筆において、期待以上の内容を書き上げたり、グラフを作成する際は、見やすいものをすばやく作り上げたりと、集中したときの能力の高さは何度も示した。数学力の高さもコンテンツ作成に遺憾なく発揮していたと思う。

（※文責: 大河原昂也）

C.3　鍋田志門による相互評価

大　島　大島さん自身が多忙な中、空いている時間はプロジェクト活動に使い、自分のタスクをしっかりとこなしてくれた。活動中は積極的に意見を述べ、新たな見解を見出してくれた。しかし、意見を述べるときは、「自分が何を伝えたいのか」をもう少し考えてから述べると、より効果的な意見になると思う。　わからないところを素直にわからないといってくれる大島さんのおかげで、後期最初の活動であった、教科書『微分』の問題を解くときも、「つまづきポイント」の発見が容易になっていた。　大島さんが宴会部長として飲み会を盛り上げてくれたことが、メンバー同士の仲を深めるきっかけになったのかもしれない。

大河原　同じコンテンツ班として活動を行っていく中で改めて彼の誠実さを実感した。多少無理があるようなタスクを受け持った時も、言い訳を付けて逃げ出すことなく、必ず最後までやり遂げていた。　大河原さんは報告書作成班に途中から加わった。途中参加にもかかわらず、報告書作成班が行っていたことを素早く把握し、我々と同等以上の働きをしてくれた。報告書作成において、大河原さんの働きはあまりにも大きい。彼が報告書作成班に来てくれなかったら、私と古屋敷さんはもっと大変な思いをしていただろう。さらに、報告書の完成ができていなかったかもしれない。　疑問に思ったことをとことん追求し、より良いものを、より良いものをと、目標を高め続ける大河原さんの姿勢には見習うものが多かった。

田　谷　田谷さんは、コンテンツ班のリーダーとして、メンバーをしっかりとまとめてくれた。各活動において、目標とやるべきことを明確に提示してくれたおかげで、非常に活動しやすかった。無理なく活動を行えるスケジュールを組んでくれたのも、活動しやすかった要因の一つだと思う。　報告書執筆活動において、任せたタスクを完璧にこなしてくれるのは非常にありがたいものだった。いわゆるホウレンソウがしっかりとしているので、より良いものを作ろうと思ったときは、一番に彼女を頼りにさせてもらった。　様々な作業を行っていく中で、作業に遅れがでたときに「田谷さんに頼めばなんとかしてくれる」というような空気があった。それは、我々の能力の低さが問題であったが、田谷さんは不満を口に出さず、妥協もせずに遅れを取り戻してくれた。損な役回りが多かったが、冷静に、より良いものを作ろうとする彼女の真面目さをメンバー全員が高く評価していた。

馬　場　後期は、ほとんどの作業において共同作業をしていた。後期の最初に行った、教科書『微分』の問題を解く活動時には、「どうしたらわかりやす模範解答ができるのか」と真剣に悩む姿が見られた。普段は場を賑やかす彼だが、この時は真面目さが垣間見えた。　与えら

れたタスクは必ず期限内に終わらせる、作業に取り組むのも早かった。議論の場では、自分の意見を相手に分かってもらうために、相手の発言を遮ってしまうこともあった。しかし、それは良くも悪くも、彼の熱意の表れだと感じていた。　報告書執筆においても、進捗を確認した際には、一番にタスクを完了していた。私が「困っている」という意を示せば、必ずヘルプに入ってくれた。普段はユーモアあふれる態度をとっているが、彼ほどタスクを快く受け持ってくれる人は他にはいなかった。

古屋敷　後期の活動では、全ての活動において共に行動していた。最初の活動では、私たちが作成した模範解答を TeX に起こす作業をしてもらった。なれない TEX での作業も、文句も言わずにこなしてくれた。彼の穏やかな性格からは想像できない鋭い意見は、模範解答作成に役立った。　報告書作成班として活動している間は、とにかくプロジェクト活動以外での活動が多かった。綿密な打ち合わせにも付き合ってくれて、多少無理があるタスクも快く受け入れてくれた。報告書に書く内容に漏れがないように、細かく考えてくれたりもした。自分のタスク以外にも様々な意見を出してくれた。彼がいなければ報告書は完成していなかった。これは間違いない。

須　貝　須貝さんとは共にコンテンツ班のメンバーとして活動したが、ほとんど共同作業する機会はなかった。 彼はどんなに時間がかかっても自分のタスクをこなしていた。それが顕著に出たのが、後期最初の活動である。何度も問題を解いて、より理解が深まる模範解答の作成していた。 成果発表会では、すごく緊張しながらも、聴衆の前で堂々と発表をこなしていた。発表に向けて一生懸命練習している様をみていたので、その努力が実ってよかった。プロジェクト活動の締めを担当することが多く、それをこなしていくうちに人前で話すのがうまくなっていった気がする。

戸　坂　コンテンツ班の最初の活動：プロジェクト内学習会では特に輝いていたと思う。得意の数学スキルを活かし、様々な「つまづきポイント」を見つけていた。　戸坂さんがタスクをこなす様は、丁寧かつ迅速なものであった。彼の誠実な態度が、タスクのこなし方に表れていると感じた。　成果発表会前は、スライドの作成にてこずっており、非常に苦労する様が見られた。しかし、最後まで図表作成に関わるなど、ここでも彼の誠実さが垣間見えた。　自虐的発言が多い彼ではあるが、ユーモアもあり、誠実で真面目な態度に救われたことが多かった。

（※文責: 鍋田志門）

C.4　田谷花乃子による相互評価

大　島　議論の際は、他のメンバーが拾い損ねていた事項に気づいて、発言していたのが印象に残っています。コンテンツ班内勉強会では、事前の学習もその後の復習も熱心に行っていた様子がありました。その成果として、コンテンツの模範解答は充実したものとなったと思っています。連絡があまり取れないこともあったため、こまめに確認してもらえると、作業がもっとやりやすくなったと思います。

大河原　コンテンツ班としての活動では、数学の理解度が高かったメンバーだったため、成果物の作成にとても貢献してくれたと思います。報告書作成においては、どうすべきかの指示を的確に出してくださってとてもやりやすかったです。議論においてはあまり発言は多くありませんでしたが、話を振ってみれば色々考えていたようだと思いました。積極的に発言をしても良いのではないかと思いますが、冷静に考えているメンバーも必要だと思いました。

鍋　田　グループワークをするための空気を作るのが上手なメンバーだと思いました。同じグループでの作業をするときは、コミュニケーションが取りやすくて助かりました。報告書についてのタスク振り分けも、適切にしていたと思います。何をどうするべきか、はっきりと伝えてくれたため、とても作業しやすかったです。自分が受け持ったタスクが大変な時も、投げ出さずにしっかりこなしていました。

馬　場　自分の意見を持っていて、正直にはっきりと伝えていたと思います。メンバーの関係がうまくいかなかった時も、どう思っているかを伝えることで、その後の活動をよりよくすることに繋がっていたのではないかと思います。自分に与えられたタスクはしっかりこなしていたと思います。スライド作成の際、うまくいかないこともありましたが、最後にはメンバーと協力して活動していました。切り替えの上手い人だと感じました。

古屋敷　コンテンツ班として、多くの作業を共にしましたが、偏ったタスクにも文句を言わずに取り組んでくれて、本当に助かりました。時間をかけ、クオリティにこだわって作業していたのではないかと思います。特に、コンテンツの模範解答については、 $\TeX$ での作業が多く任されていましたが、全ての作業をこなしてくれました。報告書作成に当たっても、大きく貢献してくれたと思います。

須　貝　コンテンツ班の活動では、模範解答の作成に時間をかけて取り組んでいた印象があります。幾度となく修正を繰り返し、最後までやり通していました。作業が行き詰まったり、うまくいかない時は、周りに助けを求めることのできるメンバーでした。自分が助けてもらうだけでなく、人手の足りない作業はないか、自ら探していたように思います。成果発表では、時間がない中練習を重ね、良い発表ができていたと思います。

戸　坂　コンテンツ班として、与えられたタスクをこなしてくれました。コンテンツ班内学習会では、とてもわかりやすく問題を解説してくれたため、とても助かりました。成果発表のスライド作成では、最後まで自分の仕事を全うしようという意思が見て取れました。個人的には、コミュニケーションが取りやすいメンバーだったと思います。

（※文責: 田谷花乃子）

C.5 馬場鯨介による相互評価

大　島　大島さんは積極的に意見を発言し、議論活発化に貢献してくれた。バイトなどで忙しい中、自分のできることをしっかりとこなしてくれた。ただ、意見を言う前にその意見の意図などを吟味してから発言するといいと思う。スライド作成時には、アンケートの分析を行ってくれた。数学の模範解答作成の時も、しっかりと尽力してくれた。

大河原　大河原さんはアウトライン作成にとても貢献してくれた。報告書を書く際には進んでエディターとしての役割を担い、メンバーの報告書のレビューや修正点をまとめてくれた。数学の模範解答作成時には数学を周りに教えられるほどのスキルを持っていた。しっかりと託された仕事は行っていたがもう少し積極的にに議論に参加するともっといいと思う。

鍋　田　鍋田さんは自分の意見をしっかりと持っていて、周りを引っ張っていくというスキルがあった。そのスキルを活かし話が停滞しているときは、よく議論を進めてくれた。報告書の作成時には、エディターを担当し、報告書の修正やレビューを行ってくれた。また、スケジュールの設定や管理、メンバーへの積極的な連絡を行ってくれた。

田　谷　田谷さんはグループリーダーを務めるなどして、メンバーをよくまとめてくれていた。文章作成や英語のスキルに長けていて、メンバーができないような英語の文章添削なども請け負ってくれた。議論の中でも冷静に物事を分析する能力があり、議論でも適切な発言をしてくれた。成果発表会ではポスター作製などでも尽力してくれた。

古屋敷　古屋敷さんはメンバーに文句を言うこともなく人一倍作業に取り組んでいた。報告書作成時には土台となるアウトラインの作成に尽力してくれた。報告書の文章を $\TeX$ に起こす作業や、エディターの編集作業など様々な業務を担当してくれた。古屋敷君の功績はプロジェクト活動内でとても大きなものだったと感じる。メンバーからの信頼も厚く頼れるメンバーの 1 人だった。

須　貝　須貝さんは数学の問題を誰よりも熱心に取り組んでいた。先生にやり直しを食らい、何ども修正を行ってよりいいコンテンツを作成するために努力していた。自分の仕事ではない周りのメンバーの仕事も手伝ってくれていた。周りえをきちんと見て、サポートできる能力があった。成果発表会ではポスター作製や発表者として尽力してくれた。

戸　坂　戸坂さんはコンテンツ班で数学の解答作成で尽力してくれた。メンバーに数学を教えられるほど数学能力に長けていた。私も問題が難しく解けなかった時には頼らせてもらった。コンテンツ班ではとても頼れる存在だった。その結果とても精度の高い模範解答を作成してくれた。スライド班の活動ではグラフの分析や作成を行ってくれた。

（※文責: 馬場鯨介）

C.6 古屋敷匠による相互評価

大　島　大島さんは、任せた仕事をきちんとこなしてくれていました。分からないことがあれば、その場ですぐに質問をしてくれて、決して、分からないまま作業を進めてしまって二度手間を追ってしまうということが少なかったです。バイトがとても忙しい中で、多くのタスクをこなしてくれていました。また、メンバーをよく楽しませるように飲み会のどの企画を積極的におこなってくれました。

大河原　大河原さんは、数学の問題を解く際に、変わった観点からのアプローチをしていて、解答を見るたびになるほどと思うものを作っていました。常に、しっかり自分の意見を持っていて、自分に与えられた仕事をとても責任もってこなしてくれていました。報告書作成のための詳細化アウトラインの作成のときは、途中から手伝ってもらったにもかかわらず、とても重いタスクをこなしてくれました。さらに、より作成物をよくしようという姿勢が一緒に仕事をしていて感じられて、むしろこっちのやる気を起こしてくれるメンバーでした。

鍋　田　鍋田くんほど、「やればできる」っていう言葉が似合う人はいないと思う。それだけ、色々な能力が高かった。その能力に頼りきってしまうことも結構あった。コンテンツ作りの模範解答の作成や、報告書作成の作成などを率先してやってくれた。鍋田くんは、人を動かす力がすごいと思った。しっかりとした意見の元、「こういう理由があるからこういう活動をして。」と具体的に活動の意図を明確にして仕事の割り振りをしていたので、とても動きやすかった。

田　谷　コンテンツ班のリーダーとしてコンテンツ作成のスケジュールを決めたり、メンバーをまとめてくれていた。コンテンツ作成の際、いろいろな意見をきちんと取り入れてくれたり、実装班とこまめに連絡を取り合っていた。ポスター作成はサブポスターを一人で完成させていた。任された仕事を黙々とこなしていた。しかし、きちんとメンバーとコミュニケーションをとって活動をしていた。

馬　場　コンテンツ班で主に模範解答の作成に尽力を注いでくれた。いつも本音でメンバーと接して、プロジェクトの活動を活発にさせてくれた。本音で接することは、なかなかできることではなくとても尊敬した。仕事がとても早くて、任された仕事に遅れることがなかった。スライド作成の際、短い時間にも関わらずプロトタイプを作ってくれた。そのおかげでたくさんのレビューを行うことができた。

須　貝　コンテンツ班では、どこでつまづくかをみんなで探している際に、最も多くの情報を提供してくれた。須貝くんがいたおかげでコンテンツがより充実したと思う。積極的に他の人を手伝っていた印象がある。成長の伸び幅がすごく、成果発表会の発表練習の際、最初はひどかったが、1時間半練習しただけで見違えるほど自信を持って発表できるようになっていたのは驚いた。

戸　坂　自分の仕事にとても責任を持って活動していた。自分に仕事がないと感じると、積極的に

仕事を探す姿勢が見られた。スライド作成の際の図表の作成の際、深夜にもかかわらず、すぐに反応して作図やその修正を行っていた。理解が追いつかず、議論の時あまり意見を出せないと言っていたが、少し内容を補足すると、鋭い意見を出してくれたりしていた。

（※文責: 古屋敷匠）

C.7 須貝奎哉による相互評価

大　島　プロジェクト活動中、失敗を顧みずに積極的に発言し、話し合いを盛り上げてくれた。 アルバイトが忙しく、なかなか作業ができない中、プロジェクト活動だけでなく、宴会部長として、宴会を盛り上げるために尽力してくれた。後期の勉強会では、事前にしっかりと復習を行うほど真面目である。また、勉強会後のアンケート結果の考察も、自分なりに考え、考察してくれた。

大河原　このプロジェクトの中で誰よりも数学ができ、数学に対するみんなからの信頼はとても厚かった。プロジェクトの話し合いや成果発表当日の設営に積極的に参加しなかったが、それらを帳消しにする報告書班の活躍で、みんなが書きやすいよう、詳細化アウトライン作成に尽力してくれた。コンテンツ班の中でも自分の問題ではない問題も解き、わかりやすく教えていた。間違いなく数学で一番貢献してくれた人物である。

鍋　田　積極的に意見を出していた。統率力があり、人一倍グループワークに長けていた。スケジュールを立てるのも上手く、楽しく効率よく作業を行うコツを彼は知っている。そのため、このプロジェクトメンバーで唯一、彼の関わっているグループは常に成功しているイメージがある。一番現実が見えていて、話し合いの時でも他とは違った鋭い意見で度々みんなを驚かせていた。議論が行き詰まった時でも、失敗を恐れずに果敢に意見を出し、活発な話し合いに大きく貢献してくれた。

田　谷　恐ろしいほど冷静で、何時も弱みをみせない屈強なメンタルを持ち合わせており、数学だけでなく、プログラミングやデザインも卒なくこなす万能なイメージがある。プロジェクトの誰もが、「彼女に仕事を振れば安心」、と思っている。コンテンツ班では癖の強いメンバーを完璧にまとめ上げ、リーダーシップを発揮してくれたおかげで、絶望的なスケジュールの中、なんとか切り抜けることができた。ポスター班でも、サブポスターを一人で完成させ、途中参加ながら大きく貢献してくれた。

馬　場　誰も触れない、触れたくないことも素直にぶつけることができる、必ずプロジェクトに一人はいてほしい、貴重な人材である。大荒れの予想がされた、夏休み後の最初のプロジェクトでは、しっかり自分の意見を主張し、有意義な話し合いに大きく貢献してくれた。また、それにより、休み後のだらけきったメンバーの心を目覚めさせてくれた。話し合いだけでなく、自分に与えられた仕事はきちんとこなし、プロジェクトに大きく貢献してくれた。

古屋敷　自分のことは二の次。プロジェクト活動を第一に考え、全うしてくれた。また、班活動で

も自分の負担が大きいにも関わらず、文句一つ言わず、無難こなしてくれるため、仕事を振りやすく、メンバーからの信頼も人一倍厚かった。成果発表に向けたスライドレビューの時は、誰よりも視聴者を意識し、どんなものが望ましいのか自分なりに考え、積極的に発言していた。報告書班では、素晴らしい詳細化アウトラインを考えてくれたおかげで、スムーズに作成することができた。この一年で最も成長した人物である。

戸　坂　数学に絶対的な自信を持っており、数学に対する姿勢はとても紳士であった。恐らく彼は本当に数学が好きでこのプロジェクトにきたのであろう。コンテンツ班では与えられた仕事は卒なくこなしてくれていた。仕事をこなす能力はマスプロ随一である。しかし、依然として、在宅ワークが多く、スライド班の活動に彼がもう少し意欲的に参加していれば、もう少し余裕をもって成果発表を迎えられたのではないかと思うと胸が苦しくなるが、家でグラフや図を素早く作成してくれた。

（※文責: 須貝奎哉）

C.8　戸坂俊平による相互評価

大　島　自分自身で議題についてよく考え、アイデアを積極的に発信しようとする姿勢が見られた。独自の観点で、他のメンバーが気づかなかったような鋭い意見を共有してくれた。また、自らのタスクには最後まで粘り強く取り組んでいた。さらに、作業中に分からないことがあれば、他のメンバーに積極的に助けを求める姿勢も見られた。

大河原　任されたタスクに対し、求められるレベル以上の仕上がりとなるように取り組む姿勢が見られた。特に、報告書の作成では他のメンバーが文章を書きやすいように、骨組みの部分を記述してくれた。また、数学がとてもできる人で、我々の学習会でも自分の問題だけではなく、他のメンバーを積極的にサポートするような一面も見られた。

鍋　田　自分の考えをしっかりと持つことができる人で、他のメンバーに積極的にアイデアを発信する姿が目立っていた。報告書の作成でも、その強い責任感で、全体を牽引してくれた。おかげで効率よく、作業しやすい環境で活動できた。また、持ち前の明るさでプロジェクト全体の雰囲気を良くしてくれて、1 年間楽しく作業することができた。

田　谷　コンテンツ班のリーダーとして、全体の指揮をとってくれた。作業の進捗や班内の現状をよく把握するなど、責任感のある行動が目立っていた。特に、スケジュールの確認、タスクの分担をしっかり行ってくれたおかげで、自分の役割が明確になり活動をスムーズに行うことができた。また、他の班とも積極的に連携し、プロジェクト全体がより良い方向へ向かうように力を注いでくれた。

馬　場　自分の考えをしっかり持って、積極的に発言していた。成果発表の準備でスライド班として一緒に活動した際は、一番重要な構成の部分について深く議論してくれて、後のスライド作成がとても効率よくできた。また、その後スライドを大幅に修正することになった際に

も、作業の無駄を省き、効率よく作業できるような環境を整えてくれた。

古屋敷　自分に割り振られたタスク以外にも、グループ全体をよく見て、必要な活動を積極的に行っていた。特に、報告書の作成では骨組みの部分を具体的に記述し、他のメンバーが本文を書きやすいように配慮してくれた。また、膨大な量の文章を TEX に起こし、体裁を整える役割を担うなど、読みやすい報告書の作成に貢献してくれた。

須　貝　自分の作業に行き詰まったら、他のメンバーに積極的に助けを求めるといった姿勢が見られた。プロジェクトの時間外でも連絡をしっかりとり、確認漏れがないように努めていた。また、他のメンバーの作業をサポートするなど、積極的に活動する面も見られた。成果発表会では、練習時間が短い中、発表者として役割を果たしていた。

（※文責: 戸坂俊平）

付録 D　コンテンツ班制作物一覧

D.1　模範解答

D.1.1　問題 1

セクション 1

まず、x^2,e^x の n 次導関数を予想する

x^2 の n 次導関数について, 前の問題の問 6(1) と同様に,

$$(x^2)^{(n)} = \begin{cases} 2x & (n=1) \\ 2 & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases}$$

e^x の n 次導関数については, 自明なので数学的帰納法の部分は省略する.

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

これらより $n \geq 3$ のとき x^2e^x の n 次導関数は 0 である．また x^2,e^x はともに,n 回微分可能であるから x^2e^x も n 回微分可能である.

<　コメント　>

x^2 と e^x の n 次導関数については, 本来は数学的帰納法を用いて証明する必要がある.

セクション 2

$(x^2)^{(0)} = x^2$,$(x^2)^{(1)} = 2x$,$(x^2)^{(2)} = 2$,$(x^2)^{(n)} = 0 (n \geq 3)$ であることから,Leibniz の公式を $n \geq 2$ として x^2e^x に適応する.

$$\begin{aligned}
(x^2e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(n-k)} (e^x)^{(k)} \qquad \text{(D.1)} \\
&= \binom{n}{n-2} (x^2)^{(n-(n-2))} (e^x)^{(n-2)} \\
&\quad + \binom{n}{n-1} (x^2)^{(n-(n-1))} (e^x)^{(n-1)} + \binom{n}{n} (x^2)^{(n-n)} (e^x)^{(n)} \\
&= e^x \left(\binom{n}{n-2} (x^2)^{(2)} + \binom{n}{n-1} (x^2)^{(1)} + \binom{n}{n} (x^2)^{(0)} \right) \qquad \text{(D.2)} \\
&= e^x \left(\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot 2 + \frac{n}{1} \cdot 2x + 1 \cdot x^2 \right) \\
&= e^x \left(n(n-1) + 2nx + x^2 \right)
\end{aligned}$$

コメント

- (D.1) について
  $n \geq 3$ のとき,$(x^2)^{(n)} = 0$ なので,（D.1）の $k = 0, \cdots, n-3$ の部分
  つまり,

  $$\binom{n}{0}(x^2)^{(n-0)}(e^x)^{(0)}+\binom{n}{1}(x^2)^{(n-(1))}(e^x)^{(1)}+\cdots+\binom{n}{n-3}(x^2)^{(n-(n-3))}(e^x)^{(n-3)}$$

  は全て 0 になる.
- （D.2）について
  $(e^x)^{(n)} = e^x$ なので, 共通因数 e^x を前に出した.
- Leibniz の公式のもう一つの適用法
  $(x^2)^{(n-k)}$ という表記を好まない場合は次の方法もある.
  積は可換なので,$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \{g(x)f(x)\}^{(n)}$ が成り立つ.
  よって Leibniz の公式は $f(x)$ と $g(x)$ を入れかえても成立する.
  実際に,x^2 と e^x を入れかえると

  $$\begin{aligned} e(x^2e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^{(n-k)}(x^2)^{(k)} \\ &= \binom{n}{0}(e^x)^{(n)}(x^2)^{(0)} + \binom{n}{1}(e^x)^{(n-1)}(x^2)^{(1)} \\ &\quad + \binom{n}{2}(e^x)^{(n-2)}(x^2)^{(2)} \\ &= e^x\left(\binom{n}{0}(x^2)^{(0)} + \binom{n}{1}(x^2)^{(1)} + \binom{n}{2}(x^2)^{(2)}\right) \\ &= e^x\left(n(n-1) + 2nx + x^2\right) \end{aligned}$$

  ここで,$(e^x)^{(n-k)} = e^x$ であることに注意する.

セクション 3

よって,

$$f^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \quad (n \geq 2) \tag{D.3}$$

$f(x)$ を 1 回微分すると,

$$\begin{aligned} f^{`}(x) &= (x^2e^x)^{`} \\ &= (x^2)^{`}e^x + x^2(e^x)^{`} \\ &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= e^x(x^2 + 2x) \end{aligned}$$

一方,(1) の右辺で形式的に $n = 1$ とすると,

$$e^x\left(x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1(1-1)\right) = e^x(x^2 + 2x)$$

となる.

従って,(1) は $n = 1$ で成立する.

また, 定理 2.7 では $f^{(0)}(x) = f(x)$ と定義している. (1) の右辺で形式的に $n = 0$ とすると,

$$e^x \left(x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 0(0-1)\right) = x^2 e^x$$

となる.

従って,(1) は $n = 0$ でも成立する.

（※文責: 鍋田志門）

D.1.2　問題 2

セクション 1

関数 $f(x) = (1+x)^\alpha \ (-1 < x < 1)$ の Maclaurin 展開から次を導け.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \tag{i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \tag{ii}$$

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \tag{iii}$$

まず、$(1+x)^\alpha \ (-1 < x < 1)$ の Maclaurin 展開について考える.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \cdots \tag{D.1}$$

セクション 2

一般化された二項係数の定義 (「微分」p.4(1.5))

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

とあるが,「$\cdots$」の扱いが k が小さいときにやや不明である.

実際, $k = 1$ のときそのまま書くと,

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-1+1)}{1!}$$

となって意味が分からなくなる. 実は, 慣例として「$\cdots$」の後の因子 $(\alpha-k+1)$ に $k = 1$ を代入したものだけ, つまり α だけが分子になっていると考える.

同じように, $k=2$ のときは「$\cdots$」の後の因子で $k=1,2$ としたものだけ, つまり $\alpha(\alpha-1)$ だけが分子になっていると考える.

$k=3$ のときは,「$\cdots$」が不要であるが, これは書かないことと同じとする.

$k \geq 4$ のときは,「$\cdots$」があっても問題ない.

コメント

このような考察をしなくても済む方法として, 積の記号

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(\alpha - j + 1)$$

を使う場合がある. これは数学的帰納法による証明を行うときに有効である.

(i) について,$\sqrt{1+x}$ は $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ と考えることができる.
(D.1) を $\alpha = \frac{1}{2}$ として使うことができるので,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

であり, 先の考察に従って,$n=$ 0,1,2 と $n \geq 3$ に分けて考える,
$n=$ 0,1,2 のとき,

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1-2}{2})\cdots(\frac{3-2n}{2})}{n!} \\ &= \frac{(-1)\cdots(3-2n)}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

以上より, $n \geq 3$ で

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

となる.
よって,(i) が導けた.

コメント

$(-1)!! = 1$ と定義があった（「微分」p.4）ので,
$n = 1$ のとき,

$$\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{(-1)^0(-1)!!}{2!!} = \frac{1}{2}$$

$n = 2$ のとき,

$$\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{(-1)1!!}{4!!} = -\frac{1}{8}$$

以上より,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n$$

とも書ける.

(i) と同様に,
(ii) について, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ は $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ と考えられるので,
(D.1) を $\alpha = -\frac{1}{2}$ として使うと,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

であり, 先の考察に従って,$n = 0,1,2$ と $n \geq 3$ に分けて考える,
$n = 0,1,2$ のとき,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2}, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{3}{8}$$

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(\frac{-1-2}{2})\cdots(\frac{1-2n}{2})}{n!} \\ &= \frac{(-1)\cdots(1-2n)}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

以上より, $n \geq 3$ で

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

となる.
よって,(ii) が導けた.

(i) と同様に,
(ⅲ) について,$\dfrac{1}{1-2x-x^2}$ は $\dfrac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = (1+(-x))^{-2}$ と書ける.
$-1 < x < 1$ と $-1 < -x < 1$ は同値だから,$(1+x)^{\alpha}$ の Maclaurin 展開は x の代わりに $-x$ としても成立している.
従って,(1) を $\alpha = -2$, x を $-x$ として使うと,

$$(1+(-x))^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n \qquad (-1 < x < 1)$$

であり, 先の考察に従って,$n = 0,1,2$ と $n \geq 3$ に分けて考える,
$n = 0,1,2$ のとき,

$$\binom{-2}{0} = 1, \qquad \binom{-2}{1} = \frac{-2}{1!} = -2, \qquad \binom{-2}{2} = \frac{-2(-2-1)}{2!} = 3$$

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}\binom{-2}{n} &= \frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!} \\ &= \frac{-2(-2-1)\cdots(-1-n)}{n!} \\ &= (-1)^n(n+1)\end{aligned}$$

以上より, $n \geq 3$ で

$$\begin{aligned}(1+(-x))^{-2} &= 1 + (-2)(-x) + 3(-x)^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)(-x)^n + \cdots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

よって,(ⅲ) が導けた.

（※文責: 鍋田志門）

D.1.3　問題 1

セクション 1

p.52 問 11 極限を調べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

$\dfrac{\log x}{x}$ は $x=\infty$ で不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$ であるので, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{x'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

等号は右から成立する.

コメント

- 『微分』p.50

> **定理 2.12** (L'Hôpital)
> $x=a$ で不定形である $f(x)/g(x)$ について, つぎは右辺が収束または $\infty(-\infty)$ であれば成り立つ.
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

とあるように, ロピタルの定理を使用するためには, 右辺が「収束または $\infty(-\infty)$」でなくてはいけない. そのため, 解答内にその仮定を確認して使っていることを「等号は右から成立する」と表現している.

セクション 2

p.52 問 11 極限を調べよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}$

$\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$ は $x=0$ で不定形$\dfrac{0}{0}$ であるので, ロピタルの定理より,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} \qquad \cdots * \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}}{1-\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1+1}{1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

等号は右から成立する.

コメント

- 別解 1

  $*$ で通分を行わず, 再び微分してロピタルの定理を用いる方法

  $\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}$ は $x=0$ で不定形 $\dfrac{0}{0}$ であるので, ロピタルの定理より,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left\{(\cos x)^{-2}-1\right\}'}{(1-\cos x)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2(\cos x)^{-3}\cdot(\cos x)'}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2(\cos x)^{-3}\cdot(-\sin x)}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} 2(\cos x)^{-3} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

  等号は右から成立する.

- 別解 2
  ランダウの記号を用いた方法

  『微分』p.48 (2.36) で $n=3$ とした,

$$f(x) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

を，$f(x)=\tan x$ に対して使う.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}(\tan x)'' &= \left\{(\cos x)^{-2}\right\}' \\ &= -2(\cos x)^{-3} \cdot (\cos x)' \\ &= 2(\cos x)^{-3} \cdot \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tan x)''' &= \left\{2(\cos x)^{-3}\right\}' \cdot \sin x + 2(\cos x)^{-3} \cdot (\sin x)' \\ &= -3 \cdot 2(\cos x)^{-4} \cdot \sin x \cdot (\cos x)' \\ &\quad + 2(\cos x)^{-3} \cdot (\cos x) \\ &= 6(\cos x)^{-4} \cdot \sin^2 x + 2(\cos x)^{-2}\end{aligned}$$

以上から,

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

また,『微分』p.49 (2.37) より,

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

以上より,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3)\right) - x}{x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + (x^3)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}$ について

$f(x) = o(x^3) \quad (x \to 0)$ とする. これは, 教科書 p.16 によると,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = 0$$

のことである. これは, $\forall f(x) = o(x^3) \quad (x \to 0)$ に対して成立するから,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

- 別解 2 で x^3 項まで漸近展開する理由

$\tan x$ も $\sin x$ も奇関数であるため, 漸近展開 (『微分』p.48 (2.36)) は奇数次の項しか出てこない.
漸近展開した時の x の係数である, $\dfrac{f'(0)}{1!}$ を調べると,

$$(\tan x)' \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

より, $\tan x - x$ は x の 3 次以上の項のみ出る. また,

$$(\sin x)' \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

より, $x - \sin x$ も x の 3 次以上の項のみ出る. つまり, 商の分子と分母における x^3 の係数どうしの比較が主になるため, それ以上の展開は必要なく, x^3 の項までの展開で十分である.

セクション 3

p.52 問 11 極限を調べよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

『微分』p.33 例 2(4) より,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

もう一度微分して,

$$\begin{aligned}(\arcsin x)'' &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \\ &= \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(1-x^2)' \\ &= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) \\ &= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

以上の計算結果を, 以下で用いる.

$\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$は, $x=0$ で不定形$\dfrac{0}{0}$である.

ここで,

$$\frac{(x-\arcsin x)'}{(x^3)'} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

であるため, 導関数の比の極限は $x=0$ で不定形$\dfrac{0}{0}$ である.
また, 2 次導関数では

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\arcsin x)''}{(x^3)''} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となり, 有限であるため, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\arcsin x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\arcsin x)''}{(x^3)''} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

等号は右から成立する.

コメント

- 別解　ランダウの記号を用いた方法

分母が x^3 なので, $\arcsin x$ の x^3 の項までの漸近展開 (『微分』p.48 (2.36)) を使う.
先ほど計算したように, $f(x) = \arcsin x$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ より}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ より}, \quad f''(0) = 0$$

また,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= x'(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' \\ &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (1-x^2)' \\ &= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

より, $f'''(0) = 1$

ここで, (2.36) で $n = 3$ としたものは, $x \to 0$ のとき,

$$f(x) = f^{(0)}(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

である. これに上で求めた係数を代入して,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

以上から,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)\\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

（※文責: 田谷花乃子）

D.1.4 問題 4

セクション 1

p.39 問 5　次の関数の 2 次導関数を求めよ.

(1)　$y=\arctan\dfrac{x}{a}$

y は $\arctan x$ と $\dfrac{x}{a}$ との合成関数である. 従って,

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

これと, 合成関数の微分法を用いて求める.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'\\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}\cdot\frac{1}{a}\\ &= \frac{a^2}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{a}\\ &= \frac{a}{a^2+x^2}\\ &= a(a^2+x^2)^{-1}\end{aligned}$$

よって, 2 次導関数は,

$$\begin{aligned} y'' &= \{a(a^2+x^2)^{-1}\}' \\ &= a \cdot (-1) \cdot (a^2+x^2)^{-2} \cdot (a^2+x^2)' \\ &= -2ax(a^2+x^2)^{-2} \end{aligned}$$

コメント

- 教科書 p.39 「$y''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$」
  を導く過程を具体的にたどる.

  $y(x)$ は f と g の合成関数であり,

  $$y(x) = f(g(x))$$

  と表される. 合成関数の微分法により,

  $$y'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

  合成関数の微分法と積の微分法により,

  $$y''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

セクション 2

p.39 問 5 次の関数の 2 次導関数を求めよ.

(2) $y = \arctan\dfrac{a}{x}$

y は,$\arctan x$ と $\dfrac{x}{a}$ との合成関数である. 従って (1) と同様に,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

これと, 合成関数の微分法を用いて求める.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{a}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{a}{x^2}\right) \\ &= -\frac{a}{x^2+a^2} \\ &= -a(x^2+a^2)^{-1} \end{aligned}$$

よって，2 次導関数は,

$$\begin{aligned} y'' &= \{-a(x^2+a^2)^{-1}\}' \\ &= -a \cdot (-1) \cdot (x^2+a^2)^{-2} \cdot (x^2+a^2)' \\ &= 2ax(x^2+a^2)^{-2} \end{aligned}$$

（※文責: 古屋敷匠）

D.1.5　問題 5

セクション 1

右辺にある x^{2n} の n 回微分について考える, $f(x) = x^{2n}$ とおく.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= (2n)x^{2n-1} \\ f^{(2)}(x) &= (2n)(2n-1)x^{2n-2} \\ f^{(3)}(x) &= (2n)(2n-1)(2n-2)x^{2n-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n-1))\,x^{2n-n} \\ &= (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n-1))\,x^{n} \end{aligned} \tag{D.1}$$

と予想できる.
※正確には数学的帰納法を用いる.
示す等式がすべて $n!$ や $(2n)!$ で書かれているから,(D.1) の係数の変形を考える.

$(2n)! = (2n)(2n-1)(2n-2) \cdot (2n-(n-1))\,n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ の両辺を $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ で割ると,

$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdot (2n-(n-1))\,n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(2n)!}{n!}$$

よって,

$$(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n-1)) = \frac{(2n)!}{n!}$$

となる.

これを (D.1) の式に代入すると,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n \tag{D.2}$$

となる.

コメント

x^n が n 回微分できることの証明の補足説明

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}a^k \tag{D.1}$$

p.31(2) では, $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ とあるが, これでは $n = 1, 2, 3$ のときを正確に表すことができないという問題が生じる. そこで, 上のように $\sum$ 記号を用いることで, その問題を解消し, すべての自然数に対して同一の命題として書くことができる. 以下, (D.1) を数学的帰納法を用いて証明する.

(D.1) を命題 $P(n)$ とおく.

$P(1)$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}a^k = x^0a^0 = 1$ より, $x^1 - a^1 = x - a$ となって真.

$$P(n) : \text{真とする} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
x^{n+1} - a^{n+1} &= x(x^n - a^n) + xa^n - a^{n+1} \\
&= x(x^n - a^n) + a^n(x-a) \\
&= x(x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}a^k + a^n(x-a) \qquad (\because (2)) \\
&= (x-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}a^k + a^n\right) \\
&= (x-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}a^k + x^{n-n}a^n\right) \\
&= (x-a)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}a^k
\end{aligned}$$

したがって, $P(n+1)$ は真となる.
以上より, $P(n)$ はすべての自然数 n に対して, 成り立つ. □

セクション 2

一方, 右辺に対して Leibniz の公式より,

$$(x^n \cdot x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)} \tag{D.3}$$

右辺 $(x^n)^{(k)}$ について,$g(x) = x^n$ とおくと,
$g(x) = x^x$ の k 回微分は,

$$\begin{aligned}
g^{(1)}(x) &= nx^{n-1} \\
g^{(2)}(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
g^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
&\vdots \\
g^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\,x^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}
\end{aligned}$$

※ここでも先ほどと同様に係数を $n!$ などで表すことが目的である.

$(x^n)^{(n-k)}$ についても同様で,

$$\begin{aligned}
g^{(n-k)}(x) &= \frac{n!}{(n-(n-k))!}x^{n-(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!}x^k
\end{aligned}$$

となる.
よって (D.3) の式は

$$(x^n \cdot x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!}x^k \tag{D.3'}$$

と変形できる.

セクション 3

更に,(D.3′) の式の右辺に (D.2) を代入すると,

$$\frac{(2n)!}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!}x^k$$

と変形できる.

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!}{n!}x^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \cdot n! \cdot x^n \\
&= n! \cdot x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

両辺を $n!$ で割ると,

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n = x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

これは任意の実数 x で成立しているため,
$x = 1$ とおくと,$\cdots$(※)

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

コメント

(※)「両辺を x^n で割る $(x \neq 0)$」でもよい.

（※文責: 大河原昂也）

D.1.6 問題 6 (1)

セクション 1

p.53 [練習問題 2.4] 5

(1) $f(x) = xe^x - \sin x - x^2 - \dfrac{2}{3}x^3$ の $x = 0$ における極大・極小を調べよ.

コメント

・この問題は高校で学習したような関数の極値を求めさせる問題ではなく, 関数が $x = 0$ で極小値をとるか, 極大値をとるか, それともどちらでもないのかを問うている.
・問題の f に対しては, $f'(x) = 0$ をみたすすべての x を求めるのは困難である. そのため, 増減表を用いて考えることは難しい. したがって, この様な出題形式になっている.

セクション 2

$f \in C^\infty(\mathbf{R})$ だから,

コメント

・教科書にはないが, $C^\infty(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数全体を表す一般的な記号である. C^∞ 級関数については p.45 を参照のこと.
・以下の ① $\sim$ ④ を用いて $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ であることを示す.
① p.45 より有理関数, 三角関数, 指数関数はいずれも $\mathbf{R}$ で C^∞ 級である. その理由を $\sin x$ と e^x についてだけ以下に説明する. 任意の自然数 n に対して, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$ (p.40 例 4(1)), $(e^x)^{(n)} = e^x$ (p.31 例 1(3)) となる. したがって, $\sin x$ と e^x は $\mathbf{R}$ で連続であるため, $(\sin x)^{(n)}$ と $(e^x)^{(n)}$ も $\mathbf{R}$ 上で連続になる. よって, $\sin x, e^x \in C^\infty(\mathbf{R})$ となる.
$② p.40 定理 2.7 より, $C^\infty(\mathbf{R})$ の関数同士の積も $C^\infty(\mathbf{R})$ に属するため, 有理関数と指数関数（これらの関数は ① より $C^\infty(\mathbf{R})$ に属する）の積である xe^x は $C^\infty(\mathbf{R})$ に属する.
③ p.32 定理 2.2(1) より, f を n 回微分して求まる関数は各項を n 回微分したものの和をとったものである.
つまり, $f^{(n)}(x) = (xe^x)^{(n)} - (\sin x)^{(n)} - \left(x^2 + \dfrac{2}{3}x\right)^{(n)}$ となる. (f の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表記することは p.38~p.39 § 高次導関数にある)
④ p.18 定理 1.6(1) より, $C^\infty(\mathbf{R})$ の関数同士の和も $C^\infty(\mathbf{R})$ に属する.
① $\sim$ ④ より, $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ とわかる.

p.53 定理 2.13 を適用するため f を繰り返し微分して, $x=0$ での値を調べる.

コメント

・$f^{(n)}(x)$ を求めて, $x=0$ とおくことによって $f^{(n)}(0)$ を求める. 実は, これは C^n 級という特別な関数に対してしか通用しない方法である. 今まで学習してきたほとんどの関数に対しては, この方法を用いても問題なかった. しかし, 例えば原点を含む区間で微分可能だが C^1 級でない関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対してはこの方法は適用できない. そのため, 定義である $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ に従って $f'(0)$ を求めることになる.

$$f'(x) = (xe^x - \sin x - x^2 - \frac{2}{3}x^3)'$$

$$= (xe^x)' - (\sin x)' - (x^2)' - \frac{2}{3}(x^3)'$$

コメント

・p.32 定理 2.2(1) を利用している.

$$= x'e^x + x(e^x) - (\sin x)' - (x^2)' - \frac{2}{3}(x^3)'$$

コメント

・p.32 定理 2.2(2) を利用している.

$$= e^x + xe^x - \cos x - 2x - 2x^2$$

コメント

・p.31 例 1(2)(3)(4) を利用している.

$$f'(0) = e^0 + 0\cdot e^0 - \cos 0 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0^2 = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = (f'(x))'$$

コメント

・p.38 の高次導関数の定義より上の等式が成り立つ. 以下, これを使う.

$$f''(x) = (e^x + xe^x - \cos x - 2x - 2x^2)'$$

$$= e^x + e^x + xe^x + \sin x - 2 - 4x$$

コメント

・$(\cos x)' = -\sin x$ は例 1(4) を利用している.

$$= 2e^x + xe^x + \sin x - 2 - 4x$$

$f''(0) = 2 - 2 = 0$

$f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x + \cos x - 0 - 4$

コメント

・$(2)' = 0$ は p.30 例 1(1) を利用している.

$$= 3e^x + xe^x + \cos x - 4$$

$f'''(0) = 3 + 1 - 4 = 0$

$f^{(4)}(x) = 3e^x + e^x + xe^x - \sin x$

$f^{(4)}(0) = 3 + 1 = 4$

以上より, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 4 > 0$ となるので, $f(x)$ は $x = 0$ 極小値となる.

コメント

・p.53 定理 2.13 を利用している.

（※文責: 大河原昂也）

D.1.7 問題 6 (2)

セクション 1

p.53 [練習問題 2.4] 5

(2) $f(x) = \cos x - \log(1 + x) + x - 1$ の $x = 0$ における極大・極小を調べよ.

コメント

・この問題は高校で学習したような関数の極値を求めさせる問題ではなく, 関数が $x = 0$ で極小値をとるか, 極大値をとるか, それともどちらでもないのかを問うている.

・問題の f に対しては, $f'(x) = 0$ を満たすすべての x を求めるのは困難である. そのため, 増減表を用いて考えることは難しい. したがって, この様な出題形式になっている.

セクション 2

$I = (-1, \infty)$ とすると, $f \in C^\infty(I)$ である.

コメント

・教科書にはないが, $C^\infty(I)$ は区間 I の内部で C^∞ 級となる関数全体を示す記号である. C^∞ 級関数については p.45 を参照のこと.
・以下の ① ∼ ④ を用いて $f \in C^\infty(I)$ であることを示す.
① p.45 より, 指数関数の逆関数はその定義域の内部で C^∞ 級となるので, $\log(1+x)$ は I で C^∞ 級関数となる.
②p.45 より, 三角関数である $\cos x$ と有理関数である $(x-1)$ は定義域 $\mathbf{R}$ の内部で C^∞ 級となるため, $I \subset \mathbf{R}$ よりそれぞれの関数は $C^\infty(I)$ に属する.
③ p.32 定理 2.2(1) より, f を n 回微分して求まる関数は各項を n 回微分したものの和をとったものである.
つまり, $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} - (\log(1+x))^{(n)} + (x-1)^{(n)}$ となる. (f の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表記することは p.38 ∼ p.39 § 高次導関数にある)
④ p.18 定理 1.6(1) より, $C^\infty(\mathbf{R})$ に属する関数同士の和も $C^\infty(\mathbf{R})$ に属する.
① ∼ ④ より, $f \in C^\infty(I)$ とわかる.

p.53 定理 2.13 を適用するため f を繰り返し微分して, $x=0$ での値を調べる.

コメント

・$f^{(n)}(x)$ を求めて, $x=0$ とおくことによって $f^{(n)}(0)$ を求める. 実は, これは C^n 級という特別な関数に対してしか通用しない方法である. 今まで学習してきたほとんどの関数に対しては, この方法を用いても問題なかった. しかし, 例えば原点を含む区間で微分可能だが C^1 級でない関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対してはこの方法は適用できない. そのため, 定義である $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ に従って $f'(0)$ を求めることになる.

$$f'(x) = (\cos x - \log(1+x) + x - 1)'$$

$$= (\cos x)' - (\log(1+x))' + (x-1)'$$

コメント

・p.32 定理 2.2(1) を利用している.

$$= -\sin x - \frac{1}{1+x}(1+x)' + 1$$

コメント

・p.31 例 1(2)(4), p.32 定理 2.3, p.33 例 2(1) を利用している.

$$= -\sin x - \frac{1}{1+x} + 1$$

$$= -\sin x - (1+x)^{-1} + 1$$

$f'(0) = -1 - 0 + 1 = 0$

$f''(x) = (f'(x))'$

コメント

・p.38 の高次導関数の定義より上の等式が成り立つ．以下, これを使う.

$$f''(x) = (-\sin x - (1+x)^{-1} + 1)'$$

$$= -\cos x + (1+x)^{-2} + 0$$

コメント

・p.30 例 1(1), p.33 例 2(2) を利用している.

$$= -\cos x + (1+x)^{-2} + 0$$

$f''(0) = -1 + 1 + 0 = 0$

$f'''(x) = \sin x - 2(1+x)^{-3}$

$f'''(0) = -2$

以上より, $f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) = -2 < 0$ となるので, $f(x)$ は $x = 0$ 極値をとらない.

コメント

・p.53 定理 2.13 を利用している.

（※文責: 大河原昂也）

D.1.8　問題 6 (3)

セクション 1

p.53 [練習問題 2.4] 5

(3)$f(x) = \sin x - \arcsin x + \dfrac{1}{3}x^3$ の $x = 0$ における極大・極小を調べよ.

コメント 1

・この問題は高校で学習したような関数の極値を求めさせる問題ではなく, 関数が $x = 0$ で極小値をとるか, 極大値をとるか, それともどちらでもないのかを問うている.
・問題の f に対しては, $f'(x) = 0$ を満たすすべての x を求めるのは困難である．そのため, 増減表を用いて考えることは難しい．したがって, この様な出題形式になっている.

セクション 2

$\arcsin x$ の定義域は $[-1, 1]$ なので,

コメント 2

・p.22 Ⅲ 逆三角関数 (1.16) より, $\arcsin x$ の定義域は $[-1, 1]$ とわかる.

セクション 3

f の定義域 も $J = [-1, 1]$ である.
さらに, $I = (-1, 1)$ とすると $f \in C^\infty(I)$ であるので,

コメント 3

・教科書にはないが, $C^\infty(I)$ は区間 I の内部で C^∞ 級となる関数全体を示す記号である. C^∞ 級関数については p.45 を参照のこと.
・以下の ①～④ を用いて $f \in C^\infty(I)$ であることを示す.
① p.45 より, 三角関数の逆関数はその定義域 J の内部で C^∞ 級となるので, $\arcsin x$ は J の内部である I で C^∞ 級関数となる.
② p.45 より, 三角関数である $\sin x$ と有理関数である $\dfrac{1}{3}x^3$ は $\mathbf{R}$ で C^∞ 級となるため, $I \subset \mathbf{R}$ よりそれぞれの関数は $C^\infty(I)$ に属する.
③ p.32 定理 2.2(1) より, f を n 回微分して求まる関数は各項を n 回微分したものの和をとったものである.
つまり, $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} - (\arcsin x)^{(n)} + \left(\dfrac{1}{3}x^3\right)^{(n)}$ となる. (f の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表記することは p.38～p.39 §高次導関数にある)
④p.18 定理 1.6(1) より, $C^\infty(I)$ の関数同士の和も $C^\infty(I)$ に属する.
①～④ より, $f \in C^\infty(I)$ とわかる.

p.53 定理 2.13 を適用するため f を繰り返し微分して, $x = 0$ での値を調べる.

コメント 4

・$f^{(n)}(x)$ を求めて, $x = 0$ とおくことによって $f^{(n)}(0)$ を求める. 実は, これは C^n 級という特別な関数に対してしか通用しない方法である. 今まで学習してきたほとんどの関数に対しては , この方法を用いても問題なかった. しかし, 例えば原点を含む区間で微分可能だが C^1 級でない関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対してはこの方法は適用できない. そのため, 定義である $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ に従って $f'(0)$ を求めることになる

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin x - \arcsin x + \frac{1}{3}x^3\right)' \\ &= (\sin x)' - (\arcsin x)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \end{aligned}$$

コメント 5

・p.32 定理 2.2(1) を利用している.

$$= \cos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x^2$$

コメント 6

・p.31 例 1(2)(4), p.33 例 2(4) を利用している.

$$= \cos x - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2$$

$$f'(0) = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$f''(x) = (f'(x))'$$

コメント 7

・p.38 の高次導関数の定義より上の等式が成り立つ. 以下, これを使う.

$$f''(x) = (\cos x - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2)'$$

$$= -\sin x - \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)' + 2x$$

コメント 8

・$((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})' = -\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'$ は p.32 定理 2.3 を利用している.

$$= -\sin x - x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 2x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x - (x'(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x((1-x^2)^{-\frac{3}{2}})') + 2$$

コメント 9

・p.32 定理 2.2(2) を利用している.

$$= -\cos x - (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - x\left(-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)\right) + 2$$

$$= -\cos x - (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 2$$

$$f'''(0) = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x + \frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x) - 6x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{15}{2}x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)+0$$

コメント 10

・$(2)'=0$ は p.30 例 1(1) を利用している.

$$\begin{aligned}&=\sin x-3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}-6x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\\&\quad+\frac{15}{2}x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(0)=0$$

$$\begin{aligned}f^{(5)}(x)&=\cos x-3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+\frac{15}{2}x(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)-6(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\\&\quad+15x(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)-45x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}\\&\quad+\frac{105}{2}x^3(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}(-2x)\\&=\cos x-9(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}-90x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}-105x^4(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

$$f^{(5)}(0)=1-9=-8$$

以上より, $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=f^{(4)}(0)=0, f^{(5)}=-8<0$ となるので, $f(x)$ は $x=0$ で極値をとらないとわかる.

コメント 11

・p.53 定理 2.13 を利用している.

＜別解＞

命題 1

微分可能な f に対して,
(i)$f(x)$ が奇関数ならば, $f'(x)$ は偶関数となる.
(ii)$f(x)$ が偶関数ならば, $f'(x)$ は奇関数となる.

命題 2

$f(x)$ が奇関数ならば, $f(0)=0$

上の 2 つの命題を利用して, 解答を行う.
与式より,

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)-\arcsin(-x)+\frac{1}{3}(-x^3)\\&=-\sin x+\arcsin x-\frac{1}{3}x^3\\&=-(\sin x-\arcsin x+\frac{1}{3}x^3)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

したがって, $f(x) = -f(-x)$ となるため, $f(x)$ は奇関数である. ここで, $f \in C^{\infty}(I) \quad (I = (-1,1))$ (詳しくはコメント 3 を参照) より, f は繰り返し微分することができる. そのため, 先の 2 つの命題を利用することで, 任意の自然数 n に対して, $f^{(2n)}(0) = 0$ と求まる.

以上のことと p.53 定理 2.13 の証明を合わせると, $x = 0$ で $f(x)$ は極値をとらないことがわかる.

コメント 12

・命題 1 を示す.
(i) f が奇関数のとき, つまり $f(x) = -f(-x)$ のとき, これを微分すると

$$f'(x) = -f'(-x)(-x)' = f'(-x)$$

となる.
(ii) f が偶関数のとき, つまり $f(x) = f(-x)$ のとき, これを微分すると

$$f'(x) = f'(-x)(-x)' = -f'(-x)$$

となる.

・命題 2 を示す.
$f(x)$ は奇関数なので, $f(x) = -f(-x)$ となる. $x = 0$ とおくと $f(0) = -f(0)$ となるため, $f(0) = 0$ と求まる.

D.1.9 問題 7

セクション 1

(1) $f(x) = x^5$

高次導関数の定義に従い帰納的に $f^{(n)}(x)$ を求める.
公式 : $(x^n)' = nx^{n-1}$ (p.31 例題 1(2) を繰り返し使う)

$$f'(x) = x^4$$
$$f''(x) = (f'(x))' = 4x^3$$

以下同様に,

$$f^{(3)}(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$$
$$f^{(4)}(x) = 12 \times 2x = 24x$$
$$f^{(5)}(x) = 24$$
$$f^{(6)}(x) = 0$$

よって,6 以上のすべての自然数 n に対して, $f^{(n)}(x) = 0 \quad (*)$ が成立する.

コメント

- p.30 例 1 $f(x) = c$ (定数関数), $f'(x) = 0$

- (*) は正確には数学的帰納法で証明する.
  n=6 の時は上で求めた.(*) が正しいとすると高次導関数の定義から,
  $f^{(n+1)}(x) = \{f^{(n)}(x)\}' = (0)' = 0$ となる.
  よって (*) は n を $n+1$ としても成立する.
  以上によって, すべての自然数 $n \geq 6$ に対して (*) が成立する.

セクション 2

(2) $f(x)$=$\log(1+x)$

高次導関数の定義に従い, 帰納的に $f^{(n)}(x)$ を求める.
公式:$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ (p.33 例題 2 (1) をくり返し使う)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= \{f'(x)\}' = \left\{(1+x)^{-1}\right\}' = (-1)(1+x)^{-2} \end{aligned}$$

以下同様に,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= (-1)^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-4} \\ f^{(5)}(x) &= (-1)^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1+x)^{-5} \end{aligned}$$

よって,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \quad (n \geq 1) \tag{$*$}$$

と予想される.
(0! = 1 と定義されていることに注意する.)

コメント

$(*)$ は正確には, 数学的帰納法で証明する.

$n=1$ のとき $(*)$ は,

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= (-1)^{1-1}(1-1)!(1+x)^{-1} \\ &= 1 \cdot 1(1+x)^{-1} \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

よって, 先に計算した $f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{1+x}$ と一致するので (*) は真である.

$(*)$ が真であるとすると, 高次導関数の定義から,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} \\ &= (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

つまり, $(*)$ は n の代わりに $n+1$ としても成立する.

よって, $(*)$ は数学的帰納法により, 全ての自然数 n に対して成立する.

セクション 3

(3) $f(x) = \sqrt{x+a} = (x+a)^{\frac{1}{2}}$
高次導関数の定義に従い, 帰納的に $f^{(n)}(x)$ を求める.
公式 : $(x^\alpha)' = \alpha x^{n-1}$ ($x>0$,α は任意の実数)
(p.33 例題 2(2) を繰り返し使う)

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{2}(x+a)^{\frac{1}{2}-1} \\ f^{''}(x) &= (f'(x))' = \left\{\frac{1}{2}(x+a)^{\frac{1}{2}-1}\right\}' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(x+a)^{\frac{1}{2}-2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(x+a)^{\frac{1}{2}-3} \\ f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(x+a)^{\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots \\ &\qquad \left(-\frac{2n-5}{2}\right)\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(x+a)^{\frac{1}{2}-n} \cdots (*) \end{aligned}$$

コメント

$(*)$ における $(x+a)^{\frac{1}{2}-n} = (x+a)^{-\frac{2n-1}{2}}$ の係数のまとめ方

- (-1) の個数について
  第 2 因子の $-\frac{1}{2}$ は最後の因子 $-\frac{2n-3}{2}$ で
  $n=2$ としたものだから (-1) は全体で $(n-1)$ 個出る.
- 分子の積について
  教科書 p.4 の跳び (重) 階乗の記号 $(2n-3)!!$ を使う.
- 分母の 2 の個数
  (-1) の個数を数えたときにわかる様に n 個ある.

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(x+a)^{\frac{-(2n-1)}{2}}$
$n=1$ のときは, $(-1)!! = 1$ と定義されている.

これは正確には数学的帰納法で証明する.
$n=1$ の時, $(*)$ は、$f^{(1)}(x) = (-1)^{(1-1)}\frac{(2-3)!!}{2^1}(x+a)^{\frac{-(2-1)}{2}}$
$=\frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}$ となり, 上で計算した $f^{'}(x) = \frac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}$ と一致する.従って $(*)$ は $n=1$ のとき正しい.
(*) が正しいとすると高次導関数の定義から

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(\frac{-(2n-1)}{2})(x+a)^{\frac{-(2n-1)}{2}-1} \\
&= (-1)^{(n-1)}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(\frac{-(2n-1)}{2})(x+a)^{\frac{-(2n+1)}{2}} \\
&= (-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}(x+a)^{\frac{-(2n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

つまり, $(*)$ は n の代わりに $n+1$ としても成立している.よって $(*)$ は数学的帰納法により全ての自然数 n に対して成立する.

セクション 4

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

ここでは, $f(x)$ の形を直接微分するのではなく, 部分分数分解を行ってから微分する.

コメント

部分分数分解を行ってからでないと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x)^{-1} \\ f^{'}(x) &= (-1)(x^2-x)^{-2}(x^2-x)' \\ &= -(2x-1)(x^2-x)^{-2} \\ f^{''}(x) &= -(2x-1)'(x^2-x)^{-2} - (2x-1)\{(x^2-x)^{-2}\}' \\ &= -2(x^2-x)^{-2} + 2(2x-1)^2(x^2-x)^{-3} \end{aligned}$$

このまま微分し続けると計算が複雑になり, n 回微分した時の $f^{(n)}(x)$ の形の予測が難しい.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = (x-1)^{-1} - (x)^{-1}$$

高次導関数の定義に従い, 帰納的に $f^{(n)}(x)$ を求める.
公式 : $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$,α は任意の実数)
(p.33 例題 2(2) を繰り返し使う)

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= -(x-1)^{-2} + (-1)(-1)x^{-2} \\ &= (-1)(x-1)^{-2} + (-1)^2x^{-2} \\ f^{''}(x) &= (f'(x))' = ((-1)(x-1)^{-2} + (-1)^2x^{-2})' \\ &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot (x-1)^{-3} + (-1)^3 \cdot 2 \cdot x^{-3} \end{aligned}$$

以下同様に,
$f^{(3)}(x) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-1)^{-4} + (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$
$f^{(4)}(x) = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x-1)^{-5} + (-1)^{-5} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$
$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-1)^{-n-1} + (-1)^{-n-1} n!(x)^{-n-1}$
以上より,
$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\{(x-1)^{-n-1} - x^{-n-1}\}$ $\cdots\cdots$ (*)
と予想される.

コメント

これは正確には数学的帰納法で証明する.
$n = 1$ の時
$f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot 1! \cdot (x-1)^{-2} - x^{-2} = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2}\right)$
従って上で計算した, $f^{'}(x) = (-1)(x-1)^{-2} + (-1)^2 x^{-2}$ と一致するので $(*)$ は $n = 1$ のとき正しい.
(*) は正しいと仮定すると, 高次導関数の定義より
$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$
$= (-1)^n n!\{(-n-1)(x-1)^{-n-2} + (-n-1)(-1)x^{-n-2}\}$
$= (-1)^n n!(-n-1)\{(x-1)^{-n-2} - x^{-n-2}\}$
$= (-1)^{n+1}(n+1)!\{(x-1)^{-n-2} - x^{-n-2}\}$
つまり (*) は n のかわりに $n+1$ としても成立している.
よって (*) は数学的帰納法よりすべての自然数 n に対して成立する.

（※文責: 須貝奎哉）

D.2 データベース

問題番号	ページ数	大問番号	間違いパターン	解答表示条件
1	41	問7	①Leibnizの公式がわからない ②Σの性質がわからない ③二項展開の係数がわからない	①n回微分可能 ②Leibnizの公式 ③n回微分可能 Leibnizの公式
2	50	練習問題2.3.6	①Maclaurin展開がわからない ②!!の意味がわからない	①Maclaurin展開 ②跳び階乗
3	52	問11	①記号「lim」が何かわからない ②極限が∞/∞や0/0となってしまった ③logxの微分ができない ④sinxやtanxの微分ができない ⑤arcsinxの微分ができない	①対数関数の微分 L'Hôpital ②三角関数の微分 L'Hôpital ③逆関数の微分 L'Hôpital
4	39	問5	①arctanxの微分ができない ②arctanxがarctan(x/a)、arctan(a/x)となると微分ができない ③f(x)/g(x)の微分ができない	①逆関数の微分 ②合成関数の微分 ③商の微分 ④逆関数の微分 ⑤合成関数の微分 ⑥商の微分
5	43	練習問題2.2.7	①n回微分がわからない ②(nCk)^2がわからない ③何をしたらいいのかわからない	①n回微分可能 ②Leibnizの公式 ③n回微分可能 Leibnizの公式
6	53	練習問題2.4.5	①極大・極小がわからない ②「x=0における」がわからない ③log(1+x)の微分がわからない ④arcsinxの微分がわからない	①定理2.13 ②対数関数の微分 定理2.13 ③逆関数の微分 定理2.13
7	40	問6	①高次導関数がわからない ②logの微分がわからない ③微分の規則性が見えない((3)のみ提示) ④1/(x+x^2)の微分が煩雑になる	①高次導関数 ②対数関数の微分 高次導関数 ③跳び階乗 高次導関数 ④部分分数分解 高次導関数

図 D.1 問題に関するデータベース

word	page	question	answer	point
Leibnizの公式	P.40	「Leibnizの公式」が書かれている定理の番号は？	2.7	n回微分可能 積の微分 二項展開の係数
数列の極限	p.5	「数列とその極限」という節の番号は？	1.2	自然数 実数
積の微分	p.32	関数f、gの積であるf・gの微分の形が書かれている定理の番号は？	2.2	関数 微分可能 定義域
微分可能	p.30	「微分係数」を表す数式の式番号は？	2.1	極限値
n回微分可能	p.39	3次関数は、何回以上微分すると0関数になるか？	4	微分可能
Σ記号	数Ⅱ:いろいろな数列 [Σの性質]			
極限値	p.5	「lim_{x→∞} a_n=α ⇔lim_{x→∞}|a_n-α|=0」 の式番号は?	1.6	数列の極限
二項展開の係数	p.4	二項展開を書き直した式の式番号は？	1.4	二項展開 組合せ
二項展開	p.3	二項展開(1+a_1)(1+a_2)・(1+a_n)を考えるための具体例として取り上げてられているnは何？	3	組合せ
組合せ	数A:場合の数と確率 [組合せ]			
関数	p.12	関数について定義されている節の番号は？	1.4	集合 実数
定義域	p.12	§1.4 問4において、定義域が[-1,4)であるのは何番目の問題？	3	集合
集合	数A:論理と集合			
部分集合	数A:論理と集合			
和集合	数A:論理と集合			
実数	p.1	p.1で挙げられている実数の4つの区分のうち、整数は何番目に挙げられている？	2	自然数 整数 有理数 無理数
自然数	p.1	p.1で挙げられている自然数の具体的な例は、何個？	3	
整数	p.1	p.1で挙げられている整数の具体的な例は、何個？	5	
有理数	p.1	p1に「有理数とはq/p($p,q整数,¥,p ¥neq ○$)の形の数」とあるが、○に入る数字は？	0	
無理数	p.1	p.1では、実数の区分として無理数は何番目に挙げられている？	4	
左側極限値、右側極限値	p.14	左側極限値：lim_{x→a-○}f(x) ○に当てはまるのは？	0	極限値
導関数	p.30	f(x)=c(定数関数)、f'(x)=?　?に当てはまる数字は？	0	関数 左側極限値、右側極限値 極限値
高次導関数	p.38	「高次導関数」という節の番号は？	2.2	導関数 n回微分可能
Taylorの定理	p.45,46	Taylorの定理の定理番号は？	2.11	平均値の定理 C^n級関数 n回微分可能
Maclaurinの定理	p.47	Maclaurinの定理を示す式の式番号は？	2.29	C^n級関数 n回微分可能 Taylorの定理 Maclaurin展開
Maclaurin展開	p.48,49	sinxのMaclaurin展開を表している式の式番号は？	2.31	Maclaurinの定理 ランダウの記号
ランダウの記号	p.16	f(x)=o(g(x))　(x→ a)と記述できるのは、関数f(x)がg(x)に対してlim_{x→a}f(x)=?となるときである。?に当てはまる数字は？	0	開区間 収束
収束	p.5	「収束する」という用語が定義されている「数列とその極限」は§？で出てくる。？に当てはまる数字は？	1.2	
平均値の定理	p.44	平均値の定理の定理番号は？	2.9	Rolleの定理
C^n級関数	p.45	f''が連続である関数fは、C^?級である。?に当てはまる数字は?	2	高次導関数 連続
Rolleの定理	p.43	Rolleの定理が書かれている定理番号は何番？	2.8	最大値・最小値の定理 連続 微分可能
最大値・最小値の定理	p.18	最大値・最小値の定理の定理番号は何番？	1.7	有界 連続 開区間
開区間	p.2	有界でない開区間はいくつ載っている？	4	区間
有界	p.15	関数の有界性が書かれているのは何ページ？	15	関数
連続	p.17	「関数f±g、fgはAで連続である.」が書かれてる定理は何番？	1.6	関数 1変数関数の極限
1変数関数の極限	p.12	数列の極限値と関数の極限値の関係を述べた定理は何番？	1.4	関数 数列の極限
等差数列の積、跳び（重）階乗	p.4	跳び（重）階乗について説明されている問題は練習問題1.1の何番？	3	階乗 等差数列
等差数列	数B:数列 [等差数列]			
階乗	数A:場合の数と確率 [順列]			
L'Hôpital	p.50,51	lim_{x→a}(f(x)/g(x))=lim_{x→a}(f'(x)/g'(x))の式番号は？	2.38	極限値 不定形 収束
不定形	p.50	∞/∞は不定形であるが、○/○ も不定形であるとき、○にあてはまる数は？	0	L'Hôpital
対数関数の微分	p.33	(log|x|)'=○/x　○に当てはまる数は？	1	対数関数 不定形 導関数
三角関数の微分	p.31	(¥sin x)'と(¥cos x)'は、「例1 基本的な導関数」の何番？	4	三角関数 導関数
逆関数の微分	p.33	逆関数の微分について書かれている定理の番号は？	2.7	狭義単調 逆関数 導関数
対数関数	p.20	y=a^x ⇔ x=log_ay, y>0 の式番号は？	1.13	連続 狭義単調 逆関数
三角関数	数II :三角関数 [三角関数]			
逆三角関数	p.22	arcsinxの定義域が書かれている式番号は？	1.16	三角関数 狭義単調 有界閉区間 逆関数
逆関数	p.19	逆関数について書かれている節の節番号は？	1.6	連続 狭義単調 値域 定義域
狭義単調	p.19	狭義単調について書かれている節は何番？	1.6	値域 区間
有界閉区間	p.2	区間の種類について説明されているのは何ページ？	2	区間
値域	p.12	関数fの定義域をAとしたときの集合 {f(x);x∈A}の名称について書かれている節の節番号は？	1.4	集合 実数
区間	p.2	区間は全部で何種類載っている?	9	
合成関数の微分	p.32	合成関数の微分の定理番号は？	2.3	関数 微分可能 値域 合成関数 整数 無理数 有理数
合成関数	p.18	合成関数の連続性について書かれている定理の定理番号は？	1.6	関数
商の微分	p.32	商の微分について書かれているのは定理の定理番号は？	2.2	関数 微分可能
極大・極小	p.52	点aを含む(小さな)開区間I(⊂A(関数fの定義域))上でaがfの極小点となることを表す式番号は？	2.41	開区間 定義域 関数
極値	p.52	3次関数は最大で何個の極値をとるか?	2	開区間 定義域 極大・極小
定理2.13	p.53	定理2.13に書かれている式番号は？	2.45	C^n級関数 極値 Taylorの定理 微分可能 臨界点
臨界点	p.52	一般にf'(x)=○であるような点xは,臨界点とよばれる. この○に当てはまる数字は？	0	微分可能
奇関数	数III:定積分			
偶関数	数III:定積分			
部分分数分解	数Ⅲ:いろいろな関数の不定積分			

図 D.2　用語 · 定理に関するデータベース

（※文責: 大河原昂也）

参考文献

[1] 公立はこだて未来大学 (2017) 教育課程編成・実施の方針（カリキュラム・ポリシー). https://www.fun.ac.jp/department/curriculum_policy/

[2] 河添健 (2011) 数学における高等教育,pp.87- 94, 慶應義塾大学湘南藤沢学会

[3] 千歳科学技術大学 (2010) 先導的大学情報化推進プログラム. https://www.chitose.ac.jp/info/pdf/sendo_result_3.pdf (2017/01/16 アクセス)