# 公立はこだて未来大学 2020 年度 システム情報科学実習 グループ報告書

**Future University-Hakodate 2020 System Information Science Practice Group Report**

## プロジェクト名

複雑系の数理とシミュレーション

## Project Name

Mathematical and simulation of complex systems

プロジェクト番号/**Project No.**

6

## プロジェクトリーダ/Project Leader

花山竜也　Tatsuya Hanayama

## グループリーダ/Group Leader

花山竜也　Tatsuya Hanayama

## グループメンバ/Group Member

三浦玲音　Reon Miura

鈴木翔斗　Shoto Suzuki

藤田淳　Atsushi Fujita

## 指導教員

川口聡　川越敏司　斉藤朝輝

## Advisor

Satoshi Kawaguchi　Toshiji Kawagoe　Asaki Saito

## 提出日

2021 年 1 月 14 日

## Date of Submission

January 14, 2021

# 概要

本プロジェクトでは、粘菌の拡散、縞ホッケの縞模様など、生物の拡散や模様が反応拡散系で形成されるパターンを、モデル方程式を用いて解析することをプロジェクトテーマとしている。反応拡散系とは化学反応と反応物質が空間的に拡散するという二つのプロセスによって物質濃度が時間的空間的に変化する様子を記述する数理モデルのことである。パターン解析の方法として、反応拡散系の解の振る舞いを、数値計算プログラムを作成し、シミュレーションを行う。この時現れるパターンの例として、スパイラルパターン、ターゲットパターン、リング状パターンなどがある。シミュレーションを行うために、前期と後期でやる作業を前期の早いうちに明確にすることで、計画的に作業を進めた。
前期は、各自が与えられた参考文献を輪読し、毎週の課される課題を自習という形でこなしていき、その翌週のプロジェクト学習の時間で、zoom を通して各自が学んできたことを発表することで、反応拡散系におけるパターン形成について理解を深めた。また、その発表をもとに担当教員からアドバイスや訂正をもらい、自習だけでは足りていなかった部分を補ったり、間違って学習した部分を再確認したりした。また、進行波解やパターンの種類を学ぶと同時に、後期で必要となる数値計算プログラムを作成するための基礎知識を学んだ。
後期では、前期で身に付けた、数値計算プログラム作成の基礎知識を駆使し、前期同様の毎週課される課題をこなした。それと同時に、最終成果物である進行波解の振る舞いの変化をアニメーション動画として作成するために、数値計算から偏微分方程式の解の振る舞いを調べ、実際に数値計算プログラムを作成し、シミュレーションを行った。その時に現れた進行波解をもとに、どのような形のパターンが形成されているかを確認した。

キーワード　反応拡散系、パターン形成、数値計算

（※文責：三浦玲音）

# Abstract

The theme of this project is to analyze the diffusion of living organisms and the patterns formed by the reaction-diffusion system, such as the diffusion of slime molds and the striped pattern of striped hockey, using model equations. A reaction-diffusion system is a mathematical model that describes how a substance concentration changes temporally and spatially through two processes: a chemical reaction and the spatial diffusion of a reactant. As a method of pattern analysis, a numerical calculation program is created and a simulation is performed on the behavior of the solution of the reaction-diffusion system. Examples of patterns that appear at this time include spiral patterns, target patterns, and ring-shaped patterns. In order to carry out the simulation, we proceeded systematically by clarifying the work to be done in the first half and the second half early in the first half.
In the first semester, each person should read the given references, complete the tasks assigned each week in the form of self-study, and announce what they have learned through zoom during the next week's project study time. So, I deepened my understanding of pattern formation in reaction-diffusion systems. In addition, based on the presentation, we received advice and corrections from the instructor in charge, supplemented the parts that were not enough by self-study, and reconfirmed the parts that were learned incorrectly. At the same time as learning the types of traveling waves and patterns, I also learned the basic knowledge for creating numerical calculation programs that will be needed in the second half.
In the second semester, I made full use of the basic knowledge of creating numerical calculation programs that I acquired in the first semester, and completed the same weekly tasks as in the first semester. At the same time, in order to create an animation movie of the change in the behavior of the traveling wave solution, which is the final product, the behavior of the solution of the partial differential equation was investigated from the numerical calculation, and a numerical calculation program was actually created and simulated. .. Based on the traveling wave solution that appeared at that time, we confirmed what kind of pattern was formed.

**Keyword** Reaction-diffusion system, pattern formation, numerical calculation

（※文責：三浦玲音）

# 目次

# 第 1 章　背景

## 1.1　該当分野の現状と従来例

本プロジェクトの分野の現状として、自然界における様々な発生現象を取り上げて数理モデルを構築し、その解析により形態形成機構を解明し、数学的解析を行っている。生物の模様や細胞運動などによって発生するパターン形成を数理モデルとして解析することによって、その条件を決定することができる。例えば、ヒトが怪我した後に治癒される現象などは細胞集団の振る舞いが必要になる。細胞集団の振る舞いによって形成されるパターンの条件を理解し制御することができれば、病気の理解や新たな治療法の開発に役立つ知識を深めることも可能である。これからのパターン形成としては、人間の皮膚などのパターンを解析することを目指している。皮膚のパターン形成を理解することで、皮膚がんなどの疾患の早期発見や治療に繋がることが期待されている。

（※文責：三浦玲音）

## 1.2　現状における問題点

現状では、パターン形成すること自体は可能が、数値計算するうえで、式が複雑になっていき解析を行うことがやや困難になったり、わかりにくくなったりしている。つまり、パターンが形成される詳細な条件を決定するのが難しい状況になっているのである。つまり、パターンを形成させる数理モデルに対する知識を深めてから、詳細に解析していくことが、パターン形成条件を決定するには大切である。そこで、状況によって、わかりやすい方法で数学的解析を行うことを重要視している。

（※文責：三浦玲音）

## 1.3　課題の概要

本プロジェクトでは、メンバー全員で、主に生物学におけるパターン形成について考え、参考文献を輪読して理解を深めることから始めた。前期では、主に、進行波解についての理解、数値計算していくうえでの基礎知識の習得を課題とした。後期では、前期に身に付けた知識と技術をもとにプログラム作成し、実際にシミュレーションを行うことで、アニメーション動画を作成することを課題とした。

（※文責：三浦玲音）

# 第 2 章　到達目標

## 2.1　本プロジェクトにおける目的

反応拡散系について数値計算とシミュレーションを行い解析することが課題。生物の拡散や模様が数理モデルで表せることを示すために数値計算プログラムを作成し、様々なパラメータでシミュレーションを行い、動画を作成すること。

（※文責：鈴木翔斗）

### 2.1.1　通常の授業ではなく、プロジェクト学習で行う利点

本プロジェクトではまず、課題の解決に向けて論文を読み、非線形偏微分方程式を解くための基礎知識を身に着ける。これまでの講義では馴染みの少なかった非線形微分方程式というトピックの基礎知識を効率的に理解するために一つの参考文献をメンバーで分担をして読み、理解できなかったことを教えあう形式を取った。また、プロジェクト内で共通の制作物を作成するためにメンバー間の基礎知識の差異をできるだけなくす必要があるため、教えあいの形式を採用した。通常の授業では基本的に個人の知識・技術について講義・演習形式で行われるため、共通の制作物を作ることに関して向かない。

（※文責：鈴木翔斗）

## 2.2　具体的な手順・課題設定

2.1 節で述べた問題を、以下の制約条件下で解決することを考えた。
・メンバー間の反応拡散系への理解度の差を減らす。
・一部のメンバーに課題が偏らないようにする。
その結果、以下の課題が提案された。

1. 用語の理解
   課題：参考にする論文に出てくる数学の専門用語を理解しグループメンバーに理解してもらえるようには説明する。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
2. 反応拡散系の解析
   課題：反応拡散系がどのようなモデルであるかを解析し、理解する。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 I
   既存技術：行列式の解き方 (サラスの公式)
   新規習得技術：線形安定性解析
3. 捕食者ー被食者系の解析
   課題：反応拡散系における捕食者ー被食者系がどのようなモデルであるかを解析し、理解

する。
関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
既存技術：線形安定性解析, 相平面解析
新規習得技術：ヌルクラインによる流れ図

4. 捕食者ー被食者系の解の表示
   課題：捕食者ー被食者系の解がどのようなグラフになるのか表示する。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II, 情報処理演習 I, 情報処理演習 II, 情報表現基礎
   既存技術：Python によるプログラミング
   新規習得技術：グラフやアニメーションを出力するプログラミング
5. 平衡点周りの動きの表示
   課題：求まったグラフの平衡点周りの動きがどのようになっているかそれぞれ確認し表示する。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II, 情報処理演習 I, 情報処理演習 II, 情報表現基礎
   既存技術：Python,C 言語によるプログラミング
6. 捕食者ー被食者系の形状が一定なフロント進行波解の解析
   課題：捕食者ー被食者系がどのような特徴を持つのか調べるために、フロント進行波が存在しうる条件を求める。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
   既存技術：Python,C 言語によるプログラミング
7. 拡散を含めたモデルの解析
   課題：臨界点を結ぶ進行波が存在することを調べる。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
8. 拡散方程式の解析
   課題：拡散方程式の解の振る舞いを数値計算で求める。
   関連講義：解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
   既存技術：Python,C 言語によるプログラミング
   新規習得技術：数値計算アルゴリズム (差分法)
9. 双安定反応拡散方程式の解析
   課題：双安定反応拡散方程式を様々なパラメータで数値計算を行い解の振る舞いを動画化する。
   関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
   既存技術：Python,C 言語によるプログラミング
10. 一次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式の解析
    課題：一次元系の Fizthugh-Nagumo 方程式をパラメータを調整しながらパルス進行波が形成されることを確認し動画化する。
    関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
    既存技術：Python,C 言語によるプログラミング
11. 二次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式の解析
    課題：一次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式を二次元系に拡張し、時間発展をさせ解の振る舞いを確認する。

関連講義：線形代数 I, 線形代数 II, 解析学 I, 解析学 II, 数学総合演習 I, 数学総合演習 II
既存技術：Python,C 言語によるプログラミング

（※文責：鈴木翔斗）

## 2.3　到達レベル (目標)

プロジェクトメンバー間の反応拡散系の理解度の差異を減らしつつ、数値計算プログラムの作成とシミュレーションの実施によってよりよい動画を作成するために以下の目標を設定した。

- 反応拡散系についての参考文献を輪読する時間を増やし、他のメンバーに説明できるレベルまで理解する。
- プログラミング面では自分の得意なプログラミング言語を使用しつつその言語におけるアニメーションの作成について勉強する。
- 一人一つは数値計算アルゴリズムを理解し、プログラムで数値計算を行って結果を出力する。

（※文責：鈴木翔斗）

## 2.4　課題の割り当て

反応拡散系の基礎の理解を深めるためにプロジェクトメンバー全員で輪読を行ったため、用語の理解、反応拡散系の解析、捕食者ー被食者系の解析に関してはプロジェクトメンバー全員で行った。輪読では各人の負担が均等になるようにトピックごとに分担し、それぞれが担当した個所の理解を深めて、メンバー全員に発表した。捕食者ー被食者系の解の表示と平衡点周りの動きの表示に関しては数学的なアルゴリズムや使用したプログラミング言語の理解度を懸念して藤田と鈴木が担当した。捕食者ー被食者系の形状が一定なフロント進行波解の解析は三浦が担当した。また、拡散を含めたモデルの解析については花山が担当した。拡散方程式の解析は捕食者ー被食者系の解析を経験していることから藤田、三浦、鈴木が担当した。拡散方程式の発展系である双安定反応拡散方程式の解の振る舞いの動画化は藤田が担当した。一次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式も拡散方程式の発展系になるので拡散方程式の解析を経験している鈴木が担当した。二次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式は一次元系の拡張系という理由で鈴木が担当した。

（※文責：鈴木翔斗）

# 第 3 章　課題解決のプロセスの概要

2.2 節で具体化した各小課題の解決のプロセスの概要を、各々記述する。

1. 用語の理解
   参考文献の輪読を行い、各自理解した部分に関してはグループメンバーに説明できるようにした。また理解できなかった部分に関してはメンバー間での共有や担当教員に意見を求める等をして理解を深めていった。
2. 反応拡散系の解析
   反応拡散系の各項に対応するものの意味や仕組みを理解し、数値計算を行っていった。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていった。
3. 捕食者ー被食者系の解析
   捕食者ー被食者系に拡散項を加え、空間非依存的に系を解析し、モデルの理解を行っていった。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていった。
4. 捕食者ー被食者系の解の表示
   線形安定性解析を用いて、3 つの平衡点の安定性を求めていき、平衡点周りの流れを確認することで捕食者ー被食者系の理解を深めていった。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解の表示を行っていった。
5. 平衡点周りの動きの表示
   オイラー法を用いて時間発展をグラフに描き表し平衡点周りの流れを確かめた。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらい理解を深めていった。
6. 捕食者ー被食者系の形状が一定なフロント進行波解の解析
   固有値方程式を用いて、フロント進行波が存在することの解析を行っていった。フロント進行波解をアニメーション化しどのような振る舞いになる確認した。担当していたメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていき、メンバー間での理解も深めていった。
7. 拡散を含めたモデルの解析
   ロトカーヴォルテラの競争系に拡散を含め、フィッシャーーコルモゴロフ方程式を用いて進行波の速度を解析を行っていった。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていき、メンバー間での理解も深めていった。
8. 拡散方程式の解析
   フーリエ変換や差分法を用いて、反応拡散方程式の反応項が 0 の時の解析を行っていった。フーリエ変換、差分法ともに数値計算を行うプログラムの作成を行い、担当するメンバーを中心に理解を深めていった。理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら、メンバー間での理解も深めていった。

9. 双安定反応拡散方程式の解析
   差分法を用いて、双安定反応拡散方程式の様々なパラメータでの数値解析を行い、解の振る舞いをアニメーション化することで確認していった。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行った。
10. 一次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式の解析
   Fitzhugh-Nagumo 方程式を用いて、進行パルス解の振る舞いについて確かめた。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、他メンバーにも共有しつつ、理解の間違いやわからなかった部分は随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていった。
11. 二次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式の解析
   二次元に拡張した Fitzhugh-Nagumo 方程式を用いて、時間発展をした際の解の振る舞いを確かめた。担当するメンバーを中心に理解を深めていき、他メンバーにも理解内容を共有しつつ、理解の間違いやわからなかった部分に関しては随時、担当教員に修正してもらいながら解析を行っていった。

（※文責：花山竜也）

# 第 4 章　課題解決のプロセスの詳細

## 4.1　各人の課題の概要とプロジェクト内における位置づけ

前期の活動では、始めに反応拡散系についての理解を深めるために文献 [1] を使って輪読を行った。それぞれ担当となる範囲を決め、事前に担当になった範囲の要約を行った。その後、担当された範囲を順番に解説し、他のメンバーと意見を交わすといった輪読を行った。また、各メンバーが割り当てられたページに出てくる系の解析を行った。

後期の活動では、始めに拡散項のみの系の解析を各メンバーに割り当てられた手法で数値計算を行いグラフ化した。その後は、双安定反応拡散系や FitzHugh-Nagumo 方程式の解析を行い、数値計算やヌルクライン、フロント進行波解、パルス解、パターン形成をプロットするプログラム作成を各メンバーで分担し、最終発表に向けて準備を行った。

（※文責：藤田淳）

花山竜也の担当課題は以下のとおりである。

**5 月**　10p〜13p の範囲で輪読の準備を行った。

**6 月**　捕食者ー被食者系における、空間非依存的な系について理解を深めた。

**7 月**　フィッシャーーコルモゴロフの方程式から拡散がある場合の競争モデルを解析し、中間発表に向けて準備を行った。

**8-9 月**　前期で行ったことの内容を復習し、後期に向けての確認をした。

**10 月**　拡散方程式いついて数値計算を行った。

**11 月**　Fitzhugh-Nagumo 方程式の解析を行った。

**12 月**　最終発表に向けて準備を行った。

（※文責：花山竜也）

三浦玲音の担当課題は以下のとおりである。

**5 月**　5p〜7p の範囲で輪読の準備を行った。

**6 月**　フロント進行波解についての理解を深めた。

**7 月**　輪読の発表を行った。

**8-9 月**　前期に学習したことの復習と、後期に向けての確認をした。

**10 月**　拡散方程式について数値計算を行った。

**11 月**　FitzHugh-Nagumo 方程式について解析を行った。

**12 月**　最終発表用のポスターを作成した。

（※文責：三浦玲音）

鈴木翔斗の担当課題は以下のとおりである。

**5 月**　8p〜10p の範囲で輪読の準備を行った。

**6 月**　捕食者ー被食者系の解を求めるためプログラムを作成し出力した。

**7 月**　平衡点周りの動きを数学的に導き、中間発表用の資料を作成した。

**8-9 月**　前期でやってきたことの復習と後期でやることの確認をした。

**10 月**　拡散方程式について数値計算プログラムを作成し解の振る舞いを確認した。

**11 月**　一次元系および二次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式について数値計算プログラムを作成し解の振る舞いを動画化した。

**12 月**　最終発表用の資料を作成した。

（※文責：鈴木翔斗）

藤田淳の担当課題は以下のとおりである。

**5 月**　1p～5p の範囲で輪読の準備を行い、捕食者ー被食者系に拡散を加えた系について学習し、発表した。

**6 月**　捕食者ー被食者系に拡散を加えた系について線形安定性解析によって三つの平衡点の安定性を判別した。また、リアプノフ関数について勉強した。

**7 月**　線形安定性解析によって判別された安定結節点、安定渦状点の場合の平衡点周りの流れ図や、解の軌道をアニメーション化するプログラムを作成した。また、中間発表用のスライド作りをした。

**8-9 月**　今まで学習したことの復習と、後期に学習する内容を確認した。

**10 月**　反応拡散系の拡散項のみの方程式を差分法を用いて解きグラフ化した。

**11 月**　フロント進行波解のグラフやヌルクラインをプロットするプログラムを作成した。FitzHugh-Nagumo 方程式の解析を行い、ヌルクラインをプロットするプログラムを作成した。

**12 月**　最終発表の準備を行った。

（※文責：藤田淳）

## 4.2　担当課題解決過程の詳細

### 4.2.1　花山竜也

**5 月**　自分の担当する参考文献のページの読み込みを行った。ロトカーヴォルテラの競争系やフィッシャーーコルモゴロフ方程式といった専門的な数式や語句はできるだけ自分が理解でるようインターネットで調べ、わからない部分に関してはメンバー間で共有を行い確認し合った。

**6 月**　前半には、捕食者ー被食者系における拡散がない場合について考えていき、後半には、自分の担当しているページにあたる拡散がある場合における捕食者ー被食者系モデルについての解析を行った。その際、ロトカーヴォルテラの競争系モデルについて深く調べ理解を深めていった。

**7 月**　競争系における波の速度を求めるために、フィッシャーーコルモゴロフ方程式について参考文献やインターネットで調べた。競争系のフロント波の速度はフィッシャーーコルモゴロフ方程式の波の最小速度に等しくなるか、波の速度より大きくなるという推測を行うことができた。

**8-9 月**　前期で行ったことの復習を行った。また後期に向けて偏微分方程式の予習や反応拡散系に

ついて改めて調べた。

**10 月** 反応拡散方程式について、反応項を 0 とした時の数値計算を行い、数値計算を行うプログラムについての課題にメンバー間で取り組んだ。また、反応拡散方程式では時間発展をさせていくことで空間的な量は一定な量を保ちつつ拡散は行われていくことが確認することができた。

**11 月** FitzHugh-Nagumo 方程式について数値計算を行った。また、数値計算を行うプログラムについての課題にメンバー間で取り組んだ。数値計算を行うことで得られる進行パルス解の振る舞いについて推測、考察を行った。また、2 次元にした際の FitzHugh-Nagumo 方程式の数値計算にも取り組んだ。

**12 月** 最終発表のために準備を行った。

（※文責：花山竜也）

### 4.2.2 三浦玲音

**5 月** 参考図書の自分の担当するページを読み込んだ。そして、わからない単語や語句は調べて理解を深めた。主に進行波について学んだ。

**6 月** 捕食者ー被食者系に拡散を加えた系を空間非依存的な常微分方程式の形に変換し、さらに、フロント進行波解を求めることをした。そのためにフィッシャーーコルモゴロフ方程式を使用したり、固有方程式を求めたりして、進行波解について理解を深めた。

**7 月** 6 月に行ったフロント進行波解についてさらに言及し、パルス解というものとの違いなどを学習した。また、場合分けを行ったりして、フロント進行波がどのような形状になるかを計算をもとに調べた。

**8-9 月** 前期で行ったことの復習を行った。それに加えて、後期の学習に向けた準備も始めた。

**10 月** 反応拡散方程式の拡散項を 0 と定義した時の数値計算を行った。この時自分はフーリエ変換を用いた数値計算を行った。主なプログラム作成はほかの人が担当し、それを最終的に確認することで、時間発展し続けていくことで、空間的な量は一定に拡散していくことが分かった。

**11 月** FitzHugh-Nagumo 方程式についての解析を行った。実際に数値計算を行い、進行パルス解の振る舞いを考察した。主なプログラム作成はほかの人が担当し、それを最終的に確認し理解を深めた。

**12 月** 最終発表用のポスター作成を行った。

（※文責：三浦玲音）

### 4.2.3 鈴木翔斗

**5 月** 自分が担当するページを読み込んでわからない語句が出てきた場合には Web で検索して学習し輪読の準備を行った。

**6 月** 捕食者ー被食者系の解を求めるために条件を数通り設定して python でプログラムを作成しそれぞれの条件における解のグラフを出力した。プログラムの作成には情報表現基礎の講義で習得した python でのコードの書き方を用いた。その際、ライブラリを用いて数学的なグラフを出力する技術を習得した。

**7 月**　平衡点周りの動きをヌルクラインのグラフを手書きで書き数学的に導いた。その際、解析学の講義で習得した合成関数の微分や線形代数の講義で習得したサラスの公式を用いて行列式を解いた。また、中間発表用のスライドに原稿を付ける作業を行った。

**8-9 月**　前期でやってきたことの復習を行い、後期で取り扱う偏微分方程式の予習をした。

**10 月**　反応拡散方程式の反応項を 0 と定義し、拡散項だけの方程式を数値計算プログラムを作成しパラメータを設定してシミュレーションを行った。その結果を二次元グラフと三次元グラフとして出力し、Python でアニメーションを作成した。

**11 月**　一次元系の Fitzhugh-Nagumo 方程式を数値計算プログラムを作成して計算するために数値計算アルゴリズムを勉強し、プログラムを作成した。得られた進行パルス解の振る舞いを周期的境界条件のもと動画でわかるように出力し、その後、Fitzhugh-Nagumo 方程式を二次元系に拡張して時間発展で変化する解を出力した。

**12 月**　最終発表用のスライドを作成し、話す内容を決め、原稿を作成した。

（※文責：鈴木翔斗）

### 4.2.4　藤田淳

**5 月**　自分の担当した 1p～5p の範囲でわからない語句について調べたり、捕食者ー被食者系に拡散を加えた系についての解析を行い輪読の発表をした。

**6 月**　捕食者ー被食者系に拡散を加えた系を空間非依存的な常微分方程式の形に変換し、解析を行った。そして三つの平衡点の安定性を線形安定性解析によって判別した。また、安定状態の場合の解の軌道をオイラー法をつかって出力するプログラムを作成した。このプログラムによって、安定結節点の場合は直線的に解に収束し、安定渦状点の場合は渦を巻くように解に収束することがわかった。また、この系がリアプノフ関数を持つことの意味や導出の仕方を学習した。

**7 月**　オイラー法を使った解の軌道のプログラムを、二つの場合の同時出力と、平衡点や初期値が分かるように改良した。また、系のヌルクラインとベクトル場を相平面上にプロットし解の軌道をアニメーション化するプログラムを作成した。このプログラムによって平衡点周りのベクトルの流れがわかった。また、中間発表用のスライドを作成した。

**8-9 月**　前期で学習してきたことの復習と後期に行う偏微分方程式の解き方について調べた。

**10 月**　反応拡散系の拡散項のみの方程式を差分法を用いて数値計算し、ノイマン境界条件のもとで時間発展していく様をグラフ化した。また、時間発展をより分かりやすくするために三次元化したグラフも出力した。このグラフから時間発展するにつれて空間内の量は一定のまま拡散していくことが分かった。。

**11 月**　反応拡散系の反応項のみの方程式でヌルクラインをプロットし、安定点に向かう解の流れを調べた。この系は、安定点が二つあることから双安定系であることが分かった。また、反応拡散系を差分法を用いて数値計算し、ノイマン境界条件のもとでフロント進行波解が時間発展していく様をグラフ化した。フロント進行波解は、a=0.5 ときは、定常状態となりその場から動かず、0.5 より小さい場合は右に移動し、0.5 より大きい場合は左に動くことが確認できた。また、FitzHugh-Nagumo 方程式の数値計算をし、ヌルクラインをプロットすることで、安定点に向かう解の流れを調べた。この系は、一つの安定点に解が収束していることから単安定系であることが分かった。

Mathematical and simulation of complex systems

**12 月**　最終発表のためのスライド、動画を作成した。

（※文責：藤田淳）

# 第 5 章　結果

## 5.1　プロジェクトの結果

### 5.1.1　捕食者ー被食者系

前期では、下記の捕食者ー被食者系に拡散を加えた系の空間非依存的な系の解析を行った。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u - v) \equiv f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = av(u - b) \equiv g(u, v)$$

まず、相平面解析をすることによって、この系には三つの定常状態があることが分かった。この三つの定常状態は、「捕食者、被食者が不在な状態」、「捕食者が不在で、被食者数が環境収容力に等しい状態」、「捕食者と被食者が共存する状態」で、この三つの状態の平衡点は、それぞれ (0,0)、(1,0)、(b,1-b) であった。そして、三つの平衡点の安定性を解析するために線形安定性解析を行った。その結果、(0,0)、(1,0) の場合に不安定状態、(b,1-b) の場合に安定状態であることが判別できた。また、安定状態の場合 4a が b/1-b より大きい場合は安定渦状点、小さい場合は安定結節点に判別されることが分かった。

次に、安定状態の場合の解の軌道がどのようになるかを解析するためにオイラー法を使って数値計算を行った。オイラー法を使って数値計算した解をデータファイルに保存するプログラムを C 言語で作成し、gnuplot をつかって出力した。

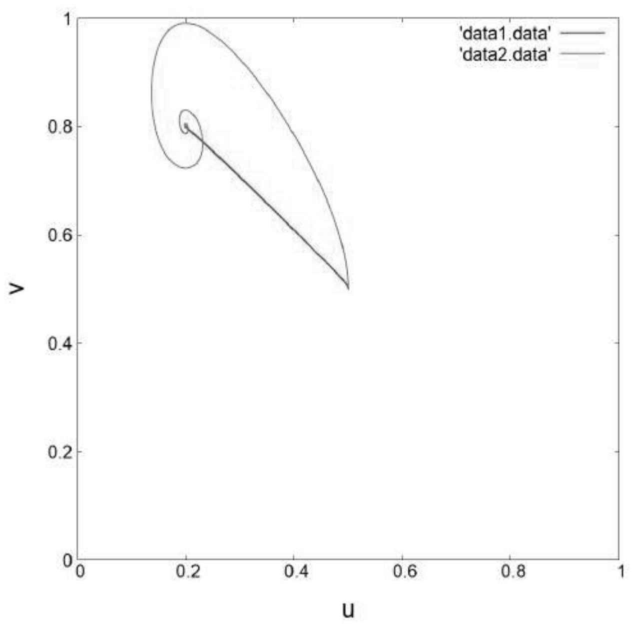


図 5.1　安定状態時の解の軌道

緑線は安定渦状点、紫線は安定結節点、初期値は青の点、平衡点は黒の点で表している。このグラフから、安定渦状点の場合は解が渦を巻くように収束しており、安定結節点の場合は解が直線的に収束していることが分かった。

次に、それぞれの平衡点周りの流れ図を見るために、f,g のヌルクラインとベクトル場を u,v の相平面上に出力するプログラムを python をつかって作成した。

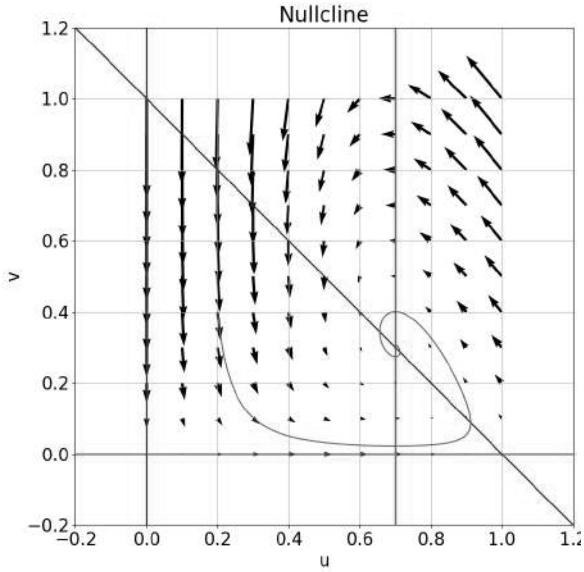


図 5.2　安定渦状点

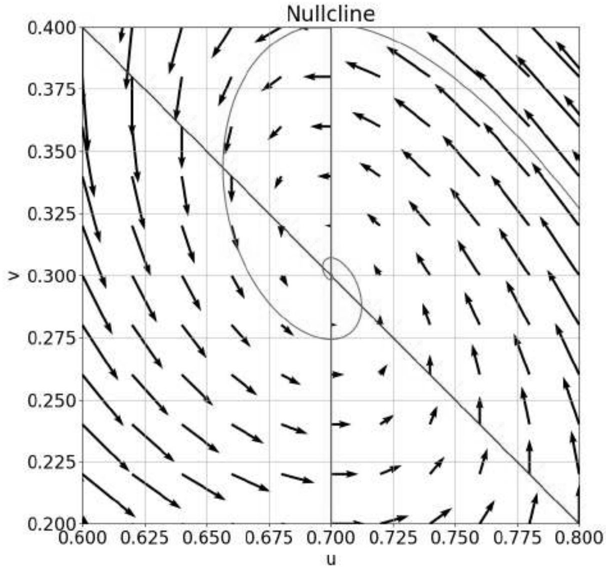


図 5.3　安定渦状点 (拡大図)

これは a=4、b=0.7 の場合のグラフである。このグラフから、初期値 (0.2,0.4) から平衡点である (0.7,0.3) に渦を巻くように直線的に解が収束しており、平衡点周りのベクトの流れも渦を巻いていることがわかった。

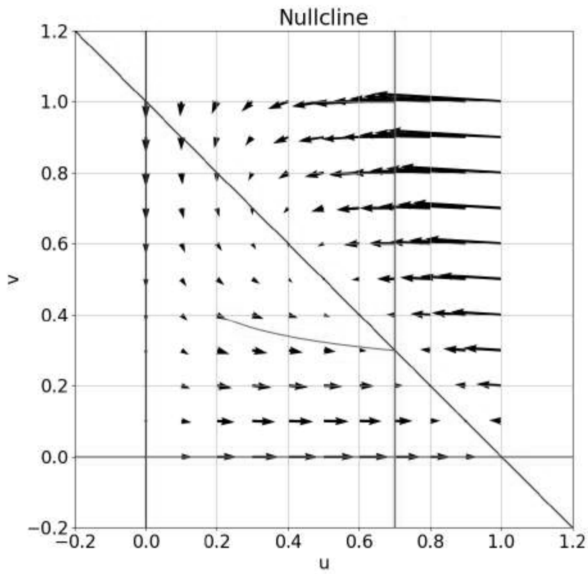


図 5.4　安定結節点

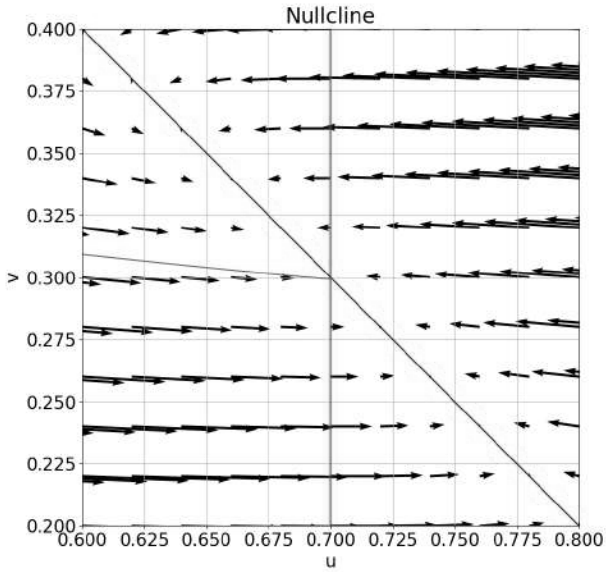


図 5.5　安定結節点 (拡大図)

これは a=0.2、b=0.7 の場合のグラフである。このグラフから、図 5.2・5.3 と違って初期値から平衡点に向かって直線的に解が収束しており、平衡点周りのベクトルの流れも直線的なものになっ

ていることがわかった。

次に、(u,v) 平面の第一象限においてこの系は

$$L(u,v) = a[u - b - bln(\frac{u}{b})] + [v - 1 + b - (1-b)ln(\frac{v}{1-b})]$$

で与えられるリアプノフ関数を持つ。リアプノフ関数とは、ある平衡点の安定性を証明できる関数である。L(b,1-b)=0 が成り立っており、(b,1-b) 以外の第一象限の点では、$L(u,v) > 0$ かつ $dL/dt < 0$ が成り立っている。リアプノフ関数は系のエネルギーを表すもので dL/dt が 0 より小さいということは時間経過とともにエネルギーが単調に減少していくことを表している。平衡点 (b,1-b) から離れるほどエネルギーが大きくなっていき、平衡点 (b,1-b) ではエネルギーが 0 になる。このことから平衡点 (b,1-b) が安定であるということがわかった。

（※文責：藤田淳）

### 5.1.2 拡散方程式

これまでは反応拡散系の拡散項を 0 と定義して、空間的な拡散が発生しない系の解析を進めてきた。今度は以下に示したような空間的な拡散が発生し、物質の反応がない系である拡散方程式を解析した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この系について、数値計算をするためにまずテイラー展開を利用して離散化した。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{d\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

アルゴリズムの理解が容易なため数値計算プログラムは差分法を利用して作成した。この系について Python を使って x,u,t の三次元グラフと x,u の二次元グラフが時間発展で解の振る舞いを変えていくような画像を出力した。境界条件はノイマン境界条件とし、d=1,$\Delta x = 1, \Delta t = 0.001$ とパラメータを設定し、初期条件を t=0 で $u = e^{\frac{-(x-500)^2}{200}}$ を与えた。

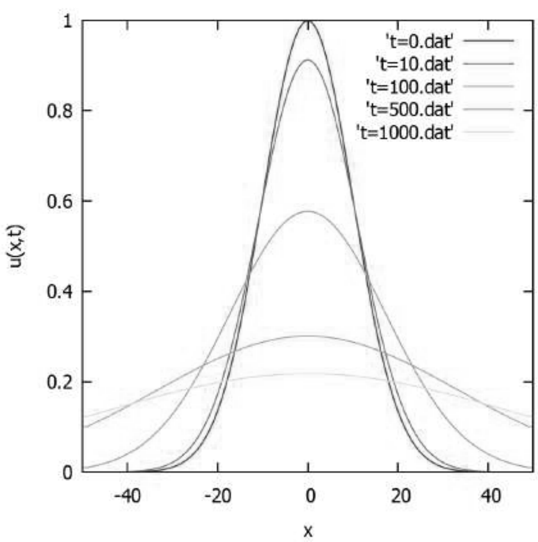


図 5.6　拡散方程式の x,u 二次元グラフ

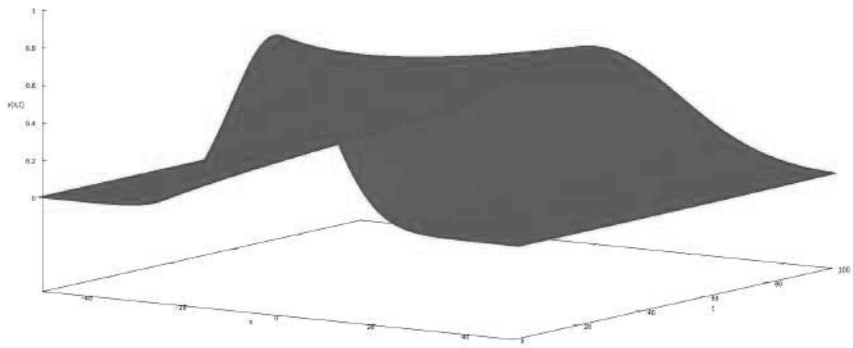

図 5.7　拡散方程式の x,u,t 三次元グラフ

図 5.6,5.7 から初期条件で与えられた形の山が時間発展とともに空間全体に広がっていき、山の高さがどんどん低くなっていくのがわかる。

（※文責：鈴木翔斗）

### 5.1.3　双安定反応拡散方程式

次に、下記の双安定反応拡散系の解析を行った。

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$
$$f(u) = u(1-u)(u-a)$$

まず、拡散項を 0 とおき f(u) のみの常微分方程式の形でヌルクラインを出力し、a=0.5 のときの 4 つの範囲からの解の流れをプロットした。

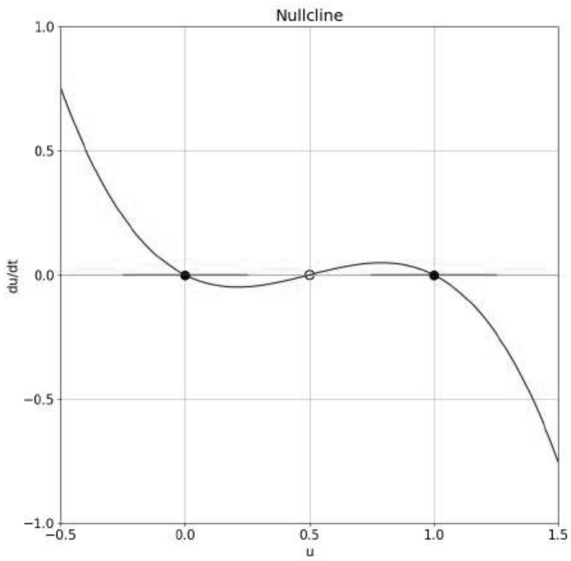


図 5.8　a=0.5 の時の 4 つの範囲からの流れ図

図 5.8 の黒点が安定点、白点が不安定点である。$u < 0$,$0 < u < 0.5$ の時は u=0 に収束し、$0.5 < u < 1$,$1 < u$ の時は u=1 に収束していることが分かる。二つの安定点に収束していること

から、この系が双安定系であることが確認できた。次に、拡散項も加えた偏微分方程式の形で系を解析した。先ほどの式を差分法を使って数値計算すると、

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{\tau} dt \varepsilon^2 \frac{1}{(dx)^2}[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n] + \frac{1}{t}(u_i^n(1 - u_i^n)(u_i^n - a))$$

となる。そして、$0 \leq x \leq 5$, $\tau = 0.01, \varepsilon = 0.01, dt = 0.00001, dx = 0.005$ とおき、a の値が 0.1,0.5,0.9 の三つの状態で時間発展していくフロント波解をグラフ化した。

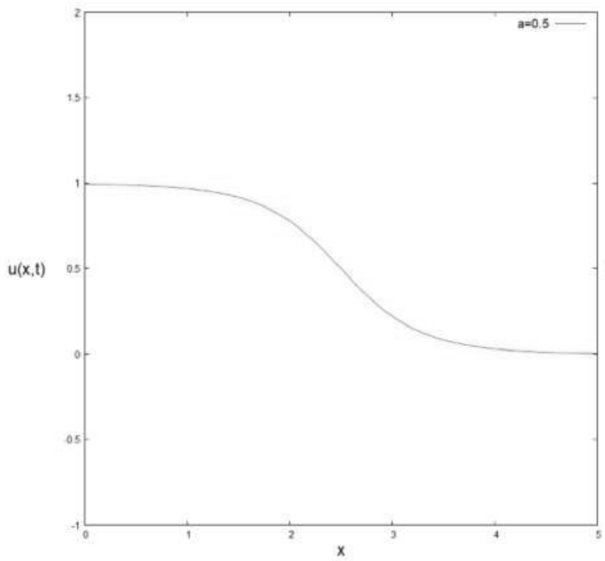


図 5.9　a=0.5 のときのフロント波解

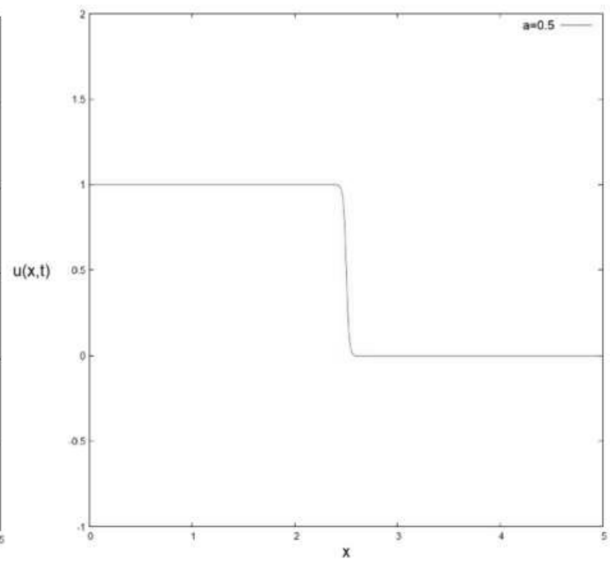


図 5.10　a=0.5 のときのフロント波解 (時間発展後)

図 5.9,5.10 は a=0.5 のときのフロント波解の時間発展をグラフ化したものである。a=0.5 のときは、フロント波解はその場から動かず界面だけ立っていくことから、u-0 と u=1 の安定性が等しい定常状態であることが確認できた。

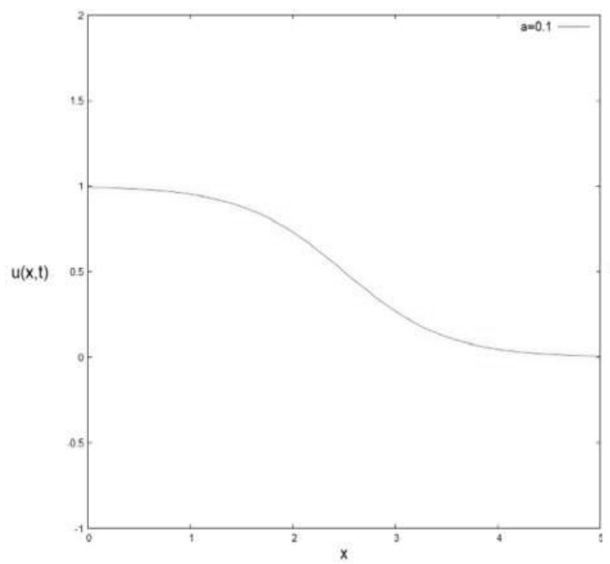


図 5.11　a=0.1 のときのフロント波解

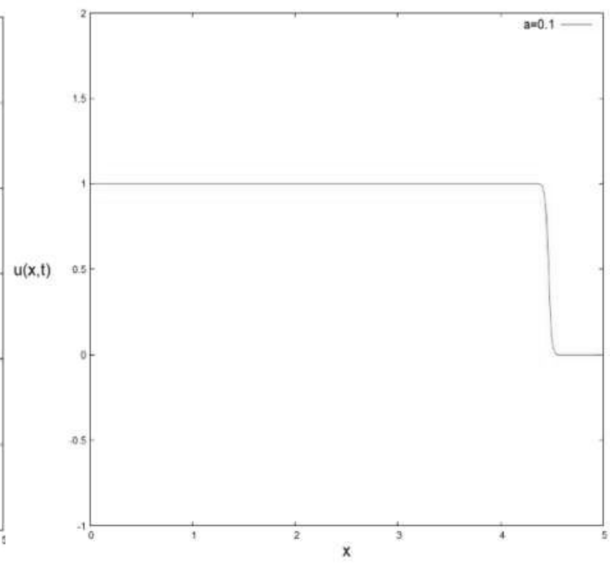


図 5.12　a=0.1 のときのフロント波解 (時間発展後)

図 5.11,5.12 は a=0.1 のときのフロント波解の時間発展をグラフ化したものである。a=0.1 のと

きは、フロント波解は右に進行し、u=1 の状態が全体を覆いつくしていることから、u=1 のほうがより安定状態であることが確認できた。

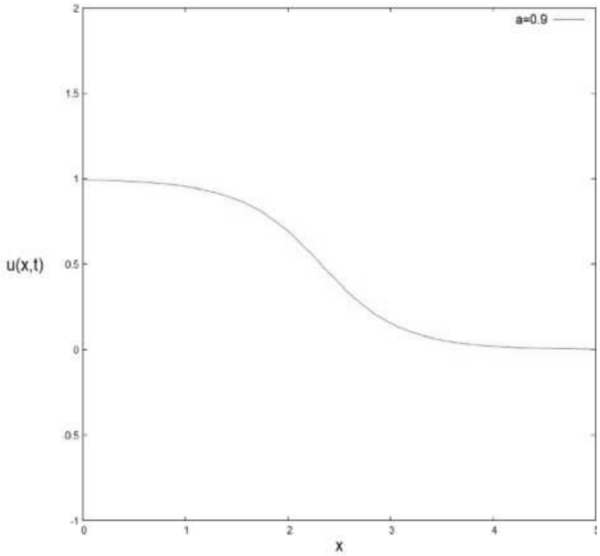


図 5.13　a=0.9 のときのフロント波解

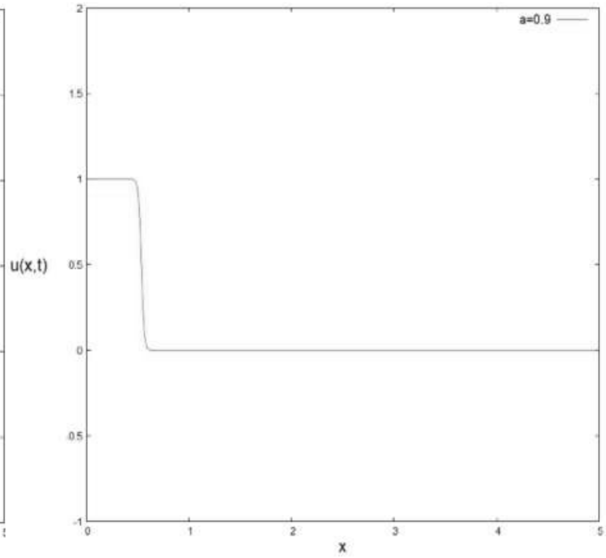


図 5.14　a=0.9 のときのフロント波解 (時間発展後)

図 5.13,5.14 は a=0.9 のときのフロント波解の時間発展をグラフ化したものである。a=0.9 のときは、フロント波解は左に進行し、u=0 の状態が全体を覆いつくしていることから、u=0 のほうがより安定状態であることが確認できた。

（※文責：藤田淳）

### 5.1.4　一次元 Fitzhugh-Nagumo 方程式

次に以下で示したような一次元の Fitzhugh-Nagumo 方程式を数値計算プログラムを作成して、解の振る舞いを動画化した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon}f(u,v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v)$$

$$f(u,v) = u(u-\alpha)(\beta-u) - v$$

$$g(u,v) = u - \gamma v + \sigma$$

この系は 2 変数関数で与えられ、d は拡散定数、$\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\epsilon$ はそれぞれ定数である。まず f(u,v)=0,g(u,v)=0 を解き、u,v 相平面で平衡点付近の流れをグラフ化した。

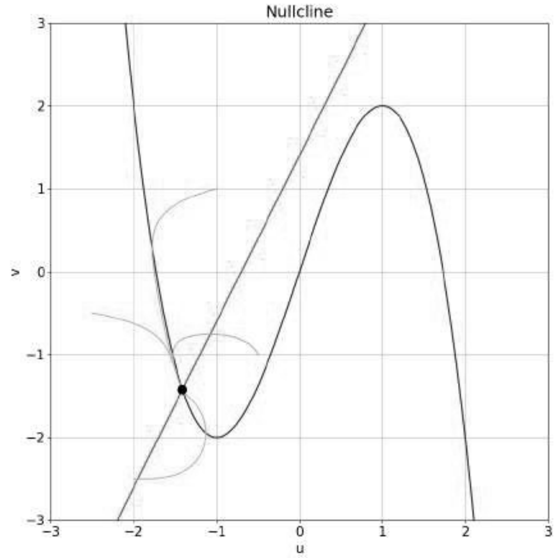


図 5.15　平衡点周りの流れ図

図 5.15 の流れ図からこの系は一つの安定点に向かって流れていることがわかる。これはこの系が単安定系であることが言える。

次に、この系を差分法を使って数値計算するために以下のように式を変形した。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\epsilon}(u_i^n(u_i^n - \alpha)(\beta - u_i^n) - v_i^n)$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t u_i^n - \Delta t \gamma v_i^n + \Delta t \sigma$$

この式を使って数値計算を行い得られた解を動画化した。境界条件は周期的境界条件に設定し、パラメータを $\alpha = -\sqrt{3}, \beta = \sqrt{3}, \epsilon = 0.02, \gamma = 0.5, \sigma = 0.7, d = 1, \Delta t = 0.0025, \Delta x = 0.1875$ とした。初期値は空間一様に u=-1.41120000000000,v=-1.4224000238418 を与え、t=0 で刺激として x=0 付近に $u = e^{\frac{-(x-1)^2}{0.5}}$ を与えた。また x の範囲を 0 から 150 にし、t が 0 から 45 になるまで計算を続けた。

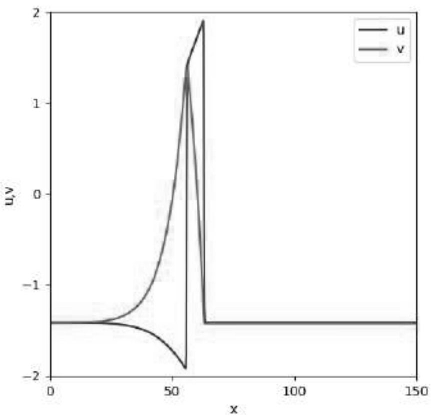


図 5.16　刺激を与えた直後のパルス解

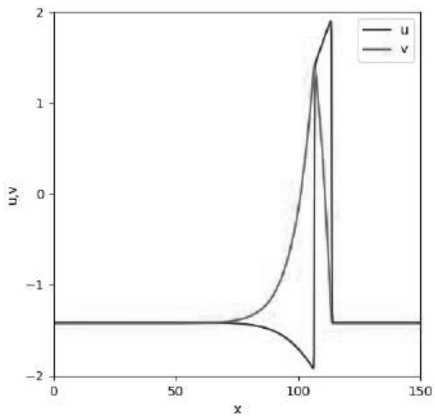


図 5.17　時間が経過したときのパルス解

グラフの左端で刺激を受けた系は左端でパルス解を形成し、その後時間経過で徐々に右端に進行していくのが図 5.16,5.17 からわかる。パルス解が右端にたどり着いたら周期的境界条件によって

形状を保ったまま左端から出てくることがわかった。それ以降も時間発展を続けても右端に向かって解が進行していくだけであった。先ほどの一次元 Fitzhugh-Nagumo 方程式は今回のパラメータを与えると進行パルス解が形成されることがわかった。

（※文責：鈴木翔斗）

### 5.1.5　二次元 Fitzhugh-Nagumo 方程式

Fitzhugh-Nagumo 方程式を二次元系に拡張し、線上の刺激として一次元の Fitzhugh-Nagumo 方程式を数値計算したときに得られたパルス解を y 軸方向に一様に並べ、その後時間発展をさせた。ただし、パルス解を並べる範囲は y 軸方向の 0 から半分までとし、半分からは初期値として u=-1.41120000000000,v=-1.4224000238418 を与えた。そして得られた結果をプロットした。

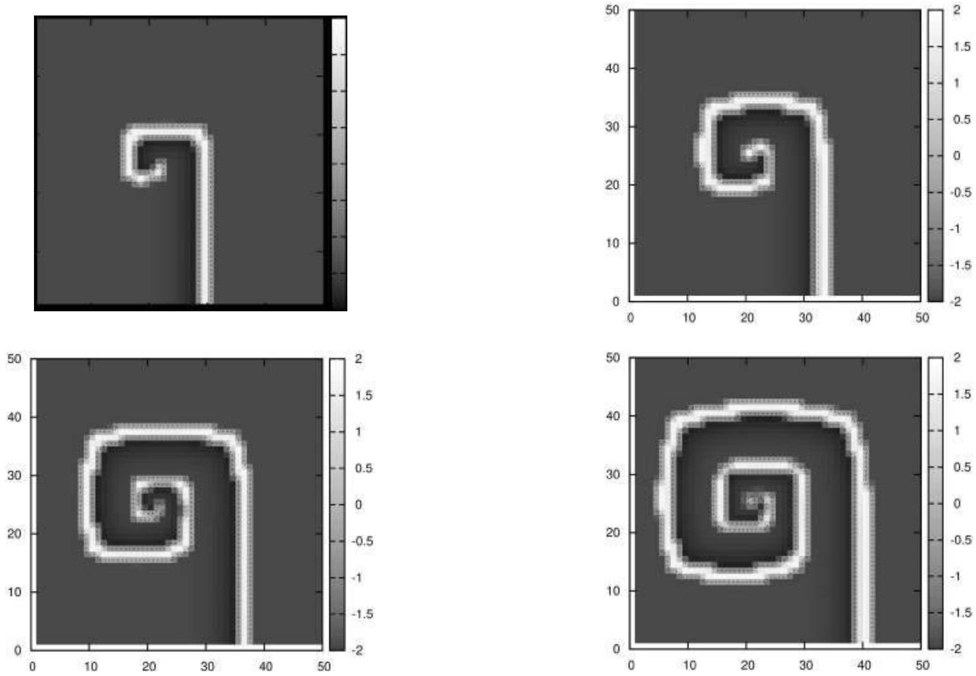


図 5.18　スパイラルを形成する解

この系は線上の刺激を与えると時間発展とともに端点が失速していき、そこから巻き込んでいくため徐々にスパイラルパターンを形成していくことがわかった。

次にこの系の中心に点状の刺激を与え、時間発展させた結果をプロットした。

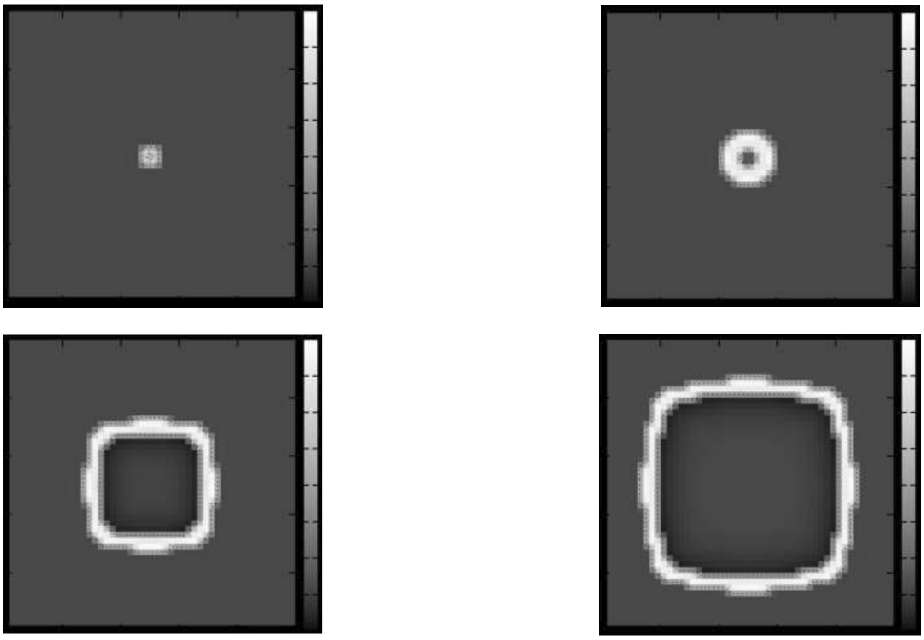

図 5.19　リングを形成する解

先ほどの系の中心に点状の刺激を与え時間発展をさせると徐々に広がっていくリング状のパターンが得られることがわかった。

（※文責：鈴木翔斗）

## 5.2　成果の評価

### 5.2.1　前期の評価

相平面解析によって定常点を求め、平衡点については線形安定性解析とリアプノフ関数を用いて安定性について考察し、捕食者ー被食者系の解と平衡点周りの流れ図を二つのパターンで出力した。これにより反応拡散系について理解が深まり、パターン形成へのアプローチができた。拡散項を除いた状態では反応拡散系を解析したとは言えない。残された課題としては、拡散項を残した状態で捕食者ー被食者系を解析することである。それによって真に反応拡散系を解析したということができ、生物学で見られるパターン形成を確認することにもつながる。

（※文責：鈴木翔斗）

### 5.2.2　後期の評価

後期では、最初に拡散項のみの系での数値計算を行い、グラフ化することで解がどのように拡散されていくか理解することができた。次に、双安定反応拡散系の解析を行い、フロント進行波解をグラフ化することで、反応拡散系の解き方や解の動きについて理解を深めることができた。

次に、FitzHugh-Nagumo 方程式を数値計算し、実際にパターン形成を行った。形成されたパターンは、下図のような (a)BZ 反応において生じるターゲットパターン、(b) 試薬を緩やかに攪拌させて開始させた螺旋波、(c) キイロタマホコリカビが発生させるスパイラルパターンに似たパターンとなった。

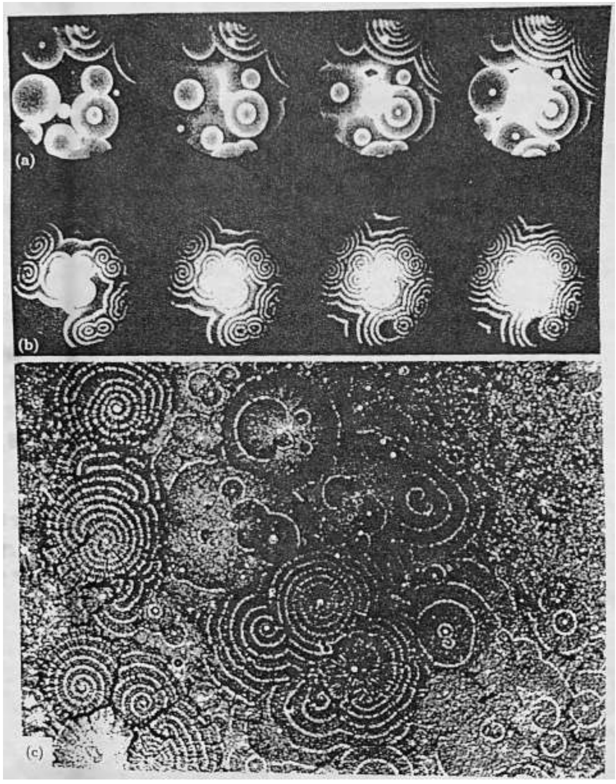

図 5.20　出典：三村昌泰総監修. マレー数理生物学 応用編. 丸善出版, 2016.

この結果から、これらの (a),(b),(c) のような現象は、FitzHugh-Nagumo 方程式で記述できることが推測できる。

残された問題としては、ターゲットパターンや縞ホッケなどの生物の模様を形成するパターンを形成することができなかったことである。これは FitzHugh-Nagumo 方程式とは違う数理モデルで表現することが可能であると推測できる。違う数理モデルの導出や解析を行えなかったことが問題ではあるが、プロジェクト活動を通して数値計算能力やプログラミング能力の向上に繋がったので良かった。

（※文責：藤田淳）

## 5.3　担当分担課題の評価

### 5.3.1　花山竜也

**担当ページの輪読の準備**　専門的な知識や語句についてはインターネットや参考資料を使い理解は深めたが、他のメンバーに理解してもらうほどの理解には至っておらず、他のメンバーの発表等で自分の理解に間違いが多々あることに気が付いたので、知識の共有をもっと積極的に行ったり、担当教員に質問を積極的にするなど、理解する点で改善の余地は大きくあったと考える。

**競争系における拡散がある場合のモデル解析**　拡散がない場合の競争モデル系の解析を行ってから、拡散のない場合の競争モデルの解析を行ったため比較的スムーズに進めることはできたが、ロトカーヴォルテラの競争系に対する知識が薄すぎたためその知識を理解するのに多くの時間を費やしてしまった。効率的に数値計算や数値解析を行ううえで、提示された参考文

献以外にも本を探したり、担当教員に質問するなど理解し解析するという点で改善の余地はあると考える。

**競争系における波の速度の解析**　フィッシャーーコルモゴロフ方程式から波の速度が方程式の波の最小速度に等しいか、最小速度よりも大きくなると推論はできた、がその推論に至るまでに時間をかけすぎたため、その後の考察部分にあまり時間をかけれなかったため、正しく理解できていない部分もあり、復習時間もほぼ取れなかった。時間をあまりかけず効率的に波の解析を行い、メンバー間での共有を行っていれば時間短縮もできたであろう。その点において改善の余地はあると考える。

**拡散方程式についての数値解析**　拡散方程式の数値計算を行ううえでフーリエ変換や差分法について学習したが理解に時間がかかってしまい、あまり効率的に数値解析を行えなかった。予習時間もあまり取れなかったが、少なくともフーリエ変換か差分法のどちらかに絞って集中的に取り組むべきであった。またそれでも理解ができなかった場合はメンバー間で教えあうなど改善の余地があると考える。

**Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値解析**　Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算を行ううえで、偏微分方程式の計算にプロジェクトでの時間を多く割いてしまった。あらかじめ予習をしていた部分にもかかわらず、予習から時間がたってしまったこともあり、知識があいまいになりすぎていた。予習していたからには継続して予習を続けていくなど、改善の余地があると考える。また、進行パルス解を確認したかったのだが個人の力では表示させ確認することができなかったため、プログラムの面でも知識不足や技術不足が目立ったので、そこにも改善の余地はあると考える。

**最終発表の準備**　最終発表時の簡易的な発表を担当した。当日の発表では、原稿の読み込み不足でスムーズな説明ができず、限られた時間の中であったにも関わらずあたふたしてしまう場面見られた。また質疑応答の際でも積極的に質問に回答できなかったため、落ち着いて考えたり、自分から発言するなど、改善の余地があると考える。

（※文責：花山竜也）

### 5.3.2　三浦玲音

**担当ページの輪読の準備**　自分でわからない単語や語句を調べつことで理解を深めた。ただ、いざ発表するときに、間違った解釈をしていたので、理解の深め方を改善する余地があると考える。

**フロント進行波解の解析**　常微分方程式から、フィッシャーーコルモゴロフ方程式を利用し、固有方程式を求めるところまで理解することができたが、フロント進行波が、場合によってどのような形でどの方向に動くのかを完全に理解することができなかったので、その点はなお一層理解を深める必要があると考える。

**中間発表の準備**　中間発表用のポスター作成に取り組んだ。誰が見ても見やすいレイアウトにするよう努めたものの、文字の大きさなどで、見づらいとの指摘をもらったので改善の余地があると考える。

**拡散方程式についての数値解析**　拡散方程式の数値計算をするにあたり、フーリエ変換から拡散方程式を解く勉強をした。最終的な解を出し、結果は出せたものの、それをほとんど利用せず終わった点に関しては改善の余地があると考える。

**Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値解析**　Fitzhugh-Nagumo 方程式を数値計算するうえで、解き方を理解するのに時間がかかってしまった点に関しては改善の余地があると考える。ただ、時間を費やした分、パターン形成するモデルが単安定系で示されることが理解できた。

**最終発表の準備**　最終発表用のポスターを担当した。中間発表の時と色合いは変更せずに、中間発表後に指摘されていた文字の大きさや見やすいデザインを意識して作成した。ただし、細かい作業を怠ってしまった部分に関しては改善の余地があると考える。

（※文責：三浦玲音）

### 5.3.3　鈴木翔斗

**担当ページの輪読の準備**　自分のわからない語句などは Web で検索して理解を深め、輪読の準備はできたがまだ完全に理解できていなかった箇所があり、発表の際にうまく説明できなことがあった。その点に関しては改善の余地があると考える。

**捕食者ー被食者系の解を表示するプログラムの作成**　実際にプログラムを作成し、解の振る舞いをグラフに表示することができたがまだ Python のライブラリを多用することが多く、プログラムの構造が理解しきれていないので、その点は改善の余地があると考える。

**平衡点周りの動きの導出、中間発表の準備**　捕食者ー被食者系の解を求めたあと平衡点周りの動きをヌルクラインとベクトル場のグラフで手書きで表した。しかし、実際の動きとは違うことがあったので理解が足りていなかった。中間発表用の資料の作成については実際の発表資料の原稿を作成した。作成した原稿の分量が多くなり、規定時間を少し超えていたためその点については改善の余地があると考える。

**拡散方程式の数値計算**　拡散方程式を数値計算するために差分法について勉強し、実際に数値計算を行い結果を出力した。実際に解が変形していく様子をアニメーションにできたことはよかったが、差分法のアルゴリズムとアニメーションにする技術を理解するのに時間を費やしてしまったことについてはもう少し勉強のスピードを上げるべきだと感じた。

**Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算**　今回反応拡散系のモデルとして二変数の偏微分方程式で表されているという理由で Fitzhugh-Nagumo 方程式を数値計算することにしたが二変数の偏微分方程式を数値計算するのにも時間がかかってしまったのでそこについては改善の余地があると言える。出力した結果については当初の目的である生物学的なパターンを可視化することにアプローチすることができたと考える。しかしパルス解が進行する動画などはプログラムが不完全なために出力に時間がかかったり、計算アルゴリズムが効率的なものではないので、数値計算のアルゴリズムや効率的なデータ構造について理解する必要があると考えた。

**最終発表の準備**　最終発表のギリギリまで数値計算プログラムや動画を作成していたのが原因で発表資料の作成に十分納得できるまで時間を費やすことができなかったのでその点については改善の余地があると考える。

（※文責：鈴木翔斗）

### 5.3.4 藤田淳

**担当ページの輪読の準備**　分からない語句を調べて理解しているつもりでいたが、先生に指摘されたときに答えられないことが多かったので、理解の深め方に改善の余地があると考える。

**捕食者ー被食者系の解の軌道や流れ図のプログラム作成**　オイラー法を使った数値計算プログラムや流れ図、解の軌道をアニメーション化するプログラムを作成することができたが、既出の方法を使っているだけで自分のプログラミン力の向上にはあまり繋がっていないと感じたため改善の余地があると考える。

**中間発表の準備**　中間発表用のスライドや動画が見てもらう相手に興味を持たせるような工夫ができなかったと感じたので改善の余地があると考える。

**拡散項のみの常微分方程式の形での数値計算とグラフ作成**　前期では、反応項のみの系の数値計算を行ったが、後期最初は、拡散項のみの系を前期同様に差分法を用いて数値計算を行った。前期の数値計算の手法を後期でも生かすことができた点は良かった。グラフ化についても C 言語を用いて二次元・三次元のグラフをプロットすることで解の拡散の仕方について理解を深めることができたので良かった。

**双安定反応拡散系の解析**　双安定反応拡散系を差分法を用いて数値計算を行い、ヌルクラインとフロント進行波解をプロットすることができたが、数値計算の手法が計算量が多くなり、プロットするのに時間がかかってしまっていた。差分法より効率的に数値計算することができる手法を模索すればプロット時間の短縮にも繋がることを考えると、数値計算の手法に改善の余地があると考える。

**FitzHugh-Nagumo 方程式の解析**　FitzHugh-Nagumo 方程式のヌルクラインを作成することで、パターンを形成するようなモデルが単安定系であることが理解できた。

**最終発表の準備**　最終発表用のスライドと動画作成を担当したが、見やすい文字・図の配置や声のトーンなど相手に興味を持たせるような工夫があったにも関わらず、実践できなかったことに改善の余地があると考える。

（※文責：藤田淳）

# 第 6 章　今後の課題と展望

前期では反応拡散系における捕食者ー被食者系の拡散項を 0 と定義し、反応項だけの式として数値計算プログラムを作成し、シミュレーションを行い解析を進めていった。しかし拡散項を 0 と定義すると捕食者ー被食者系でも空間に依存しない時間的な変化しか見られず捕食者ー被食者系を完全に解析できていない。そのためにまず拡散方程式の解析を課題とし、後期では拡散方程式の数値計算プログラムを作成し、シミュレーションを行い、解の振る舞いを確認した。今後は拡散項を 0 と定義せず捕食者ー被食者系の数値計算プログラムを作成しこの系の解析を進めていきたい。そうすることで捕食者ー被食者系の解も空間に依存する形で得ることができ、反応拡散系の解析をさらに進めることができると考える。

後期では双安定反応拡散方程式と Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算を行い、解の振る舞いをアニメーションにした。反応項と拡散項が入っている系を解析するために数値計算のアルゴリズムを勉強したが、実際にプログラムに適用できたアルゴリズムは少ししかなかったため、反応拡散系の効率的で安定的な解析をするために複雑な数値計算アルゴリズムを勉強し、プログラムに適用することが課題になる。この課題を達成し、より効率的で安定的な数値計算プログラムを作成し、双安定反応拡散方程式や Fitzhugh-Nagumo 方程式以外の反応拡散系の解析を進め、生物の拡散や模様のパターン形成をシミュレーションを通して確認していきたい。

（※文責：鈴木翔斗）

# 第 7 章　学びと今後の課題

### 7.0.1　花山竜也

プロジェクトを始めるにあたってプロジェクトメンバーは今回取り扱った反応拡散系の知識がほぼ 0 の状況から始まったため、メンバー全員での参考文献の輪読や解説を行いながら知識を蓄えていった。その際、予備知識がなくほぼ手探りの状態からやるべきことを明確にもできず最初の課題に取り組むまでにかなりの時間を費やしてしまった。時間が少なかったこともあり参考文献のページ数ごとに担当箇所を分担し、より深い理解に努めたが、自分が担当した箇所は時間の関係や理解度にあたってメンバー全員で深く取り組むことはなかった。それに加え、個人的な理解も浅くその後のプロジェクトの活動にうまくいかせなかったと感じる。自分が担当した箇所はメンバー間の中で最後にあたる部分だったこともあり、前半で担当になったメンバーの担当部分の理解や解説も積極的に行うべきであったと考える。また、自分では理解できなかったところの解説は積極的に担当教員やメンバーの意見を求めるべきであったとも考えた。

前期の内容としては、捕食者ー被食者系のモデルに関して数値解析やプログラムの作成を行った。捕食者ー被食者では生物やウイルスといったものの個体数の変動を表すモデルである。今回は捕食者と被食者の片方がいないパターンや療法とも共存しているパターンなど複数のパターンについて考察を進めていった。特に安定状態にあたる場合を中心的に考え、線形安定性解析やヤコビ行列を用いて安定状態の性質を確認した。数値計算にはかなりの時間がかかってしまったり、事前の知識もほぼ皆無の状態からはじまったこともあり、間違った数値計算や理解のしかたをしてしまう場面が多くあった。担当教員にプロジェクト時間外での質問するなど積極的に課題に取り組む必要があったと考える。インターネットなどで様々な知識を蓄えていったがうまくいかせなかった。プログラムは効率的かつ簡単なプログラムをかけるようになるべきだと感じた。また、中間発表では司会進行を務めたがスムーズな進行ができず練習不足であったと思う。質疑応答の際はすんなり答えれる場面もあったがすべての質問に対応できたわけではなかったので準備不足であったので事前にもっと様々な質問を想定して発表に取り組む必要があったであろうと考える。

後期の内容としては、拡散方程式や Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算やモデル解析を行ってきたが、プログラミングがうまくいかず周りのメンバーとのプログラムを共有し課題に取り組むことも多々あった。慣れないやり方をとってしまったため時間効率は良いものではなかったが、自分の知らなかったプログラムの知識を多く知るいい機会になったと感じた。しかし、自分の知識不足や理解力はとても遅いものだったので、自分に予備知識がないときの課題に取り組む際は人よりも時間をかけて予備知識を蓄えたうえで課題に取り組む必要があったので、今後の課題としてはメンバーに遅れを取らないように理解を深めて積極的に課題に取り組むべきである。また、期末発表では当日の簡易的な発表を担当したが時間が限られているなかでの発表に慣れておらず、躓く場面も多くあったと感じる。発表を控えているときは自分が納得するまで練習を繰り返して落ち着いて話せる必要があると考える。質疑応答の際は答えられなかった質問もありその面でも準備不足であったので、今後は準備を怠らず行う必要がある。

数値解析や解の振る舞いを確認するうえで、プログラミングをする時間もかなりの時間があったが、プログラミングの知識や技術に関しても力不足を痛感した。大半のプログラミングは Python で行ったが、c 言語が必要になったり、予備知識も少ない中、試行錯誤しながらプログラムを行っ

ていったが大半はネットで検索したプログラムを参考にしながら考えたりしていたため、自分の中の知識でプログラムを組み立てる努力をもっと行うべきだと考えた。数値計算に関しても自分の理解力の遅さや、方程式の意味をはきあちがえていたりしたので曖昧な知識ではなく、ちゃんとした知識をつけていなければならないと感じた。また、今回プロジェクト内で作成したアニメーションや動画は他メンバーに頼りっきりになってしまったため、他の人ができる課題だとしても積極的に自分から取り組み教えてもらうなどをして自分を知識を増やしていくべきであった。

プロジェクトリーダーとしては最低限の仕事は行っていたが、課題に対するメンバーの理解度の確認や知識共有、またメンバー間だけでの会議や輪読時の円滑な進行はまだまだ改善の余地があるものになってしまった。オンラインでの会議に慣れていなかったこともあるが、進行するという役割やすべきことの優先順位をあらかじめ決めておくことの大切さを実感した。発言を促したり、進行することに集中しすぎて、自分の意見をしっかり話せなかった。しかしプロジェクトリーダーはとてもいい経験になったので、今後またリーダーをする際やメンバー間での会議を行う際は円滑かつ効率のいい会議を行うことが課題になった。

（※文責：花山竜也）

### 7.0.2 三浦玲音

プロジェクト学習をいざ始める時、メンバー全員が反応拡散系について全く知識のない状態で始まった。そのような状態であったため、前期のプロジェクト学習では、参考文献 [1] の輪読から行った。知識がなかったため、最初はスローペースで行うようにし、冒頭の約 15 ページを学習した。その際メンバー全員で同時に 1 から進めてしまうと莫大な時間を費やしてしまうので、各自で役割分担して、完璧に理解する箇所を決め、理解を深めていった。そこで、各々わからない単語があったら、文献を読んだり、ネットや辞書で検索したりして、メンバー全員に共有した。それ以外の各々が理解を深めた箇所を毎週のプロジェクト学習の時間内で発表し、メンバー内での理解も深めた。そして、誤って知識を蓄えていた部分に関しては、担当教員から解説やアドバイスを頂き、知識をさらに蓄えていった。自分が担当した箇所については、線形代数学でやった固有方程式などを利用して計算していき、進行波解について理解を深めた。進行波解は後期で重要になってくるため、誤った知識を身に付けないように努力した。もともとの知識がなかった分、担当教員からの指摘を多くもらってしまったのは理解の深め方に問題があったと考える。また、メンバー全員が担当箇所を発表できずに前期のプロジェクト学習が終わってしまったので、自分の担当箇所をもう少し早く終わらすための努力が足りていなかったと考える。自分で何とかしようとして、メンバーや担当教員に頼れなかったのが原因だと考える。さらに、他のメンバーの担当箇所の振り返りをいざ行った時、全然理解できていない部分があったので、自分の担当箇所にばかり目がいっており、他のメンバーの担当箇所の範囲に手を付けれていなかったのは良くなかった点である。わからなくなっていたら、その時点で他のメンバーに聞けばよかったものの、後回しにしてしまったのは改善していこうと思う。そういったこともあり、課題をおこなう上での時間配分と、コミュニケーションをとることの大切さを学んだ。

後期では、拡散方程式や Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算をおこなった。前期に数値計算のやり方をある程度学習していたものの、後期の予習が足りていなかったこともあり、後期のはじめはスムーズに作業を進めることができなかった。拡散方程式の数値計算では、フーリエ変換や差分法用いて、最初はプログラムなどを作成せずに数学的解析した。メンバー内で担当するやつを決め

て、実際に計算した。自分はフーリエ変換を用いたものを担当したが、最終的に計算結果を導き出し、計算することができた点に関しては良かったと考える。しかし、最終的にプロジェクト内では差分法を主に利用したため、差分法の理解ができていなかった点に問題があったと考える。

本プロジェクトでの数値計算プログラムの作成では、投に使用する言語は定めずに行った。各々できそうな言語で実際に数値計算プログラムを作成することを試みるようにした。プロジェクト内で主に使用したのは、C 言語と Python である。私は Python を使用していたが、Python で行き詰まってしまった時には、C 言語で似たようなプログラムを作成し、実行することを試みた。ヌルクラインの表示や、簡単なグラフの表示はある程度できていたのだが、最終的なアニメーション動画の作成には苦しんでしまい、ほかのメンバーに頼ってしまった点に関して、もう少し努力が必要だったと感じる。しかし、本来のプロジェクトの目的である、「実際に数値計算をおこない、モデリング能力、プログラミング能力を身に付けて、解の振る舞いを調べて、どのようなパターン形成が出来ているかを確認する」というものがしっかりと果たすことができていたのではないかと思う。さらに、後期は前期に比べて、一つの課題に対してプロジェクトメンバー内全員で一つの課題をこなす感じだったので、メンバー内で話し合いを増やし、コミュニケーションをとることができたのはとてもよかったのではないかと考える。

最終発表の時に関して、私がおこなったこととして、最終発表用のポスター作成と、発表時の司会進行をおこなった。ポスター作成は中間発表の時にも行ったが、その時は、発表が終わって評価シートを見たときに、たくさんの指摘をいただいたので、最終用では、指摘されていたことを改善するように作成した。ポスター作成自体初めてで、最初は全然何もできなかったが、ポスターを見てくださる人が見やすいものを作ろうという意識で作成したら、自然に良いポスターを作成することができた。また、発表時の司会進行に関しては、スタートしたらしっかりと始めることができ、質疑応答に関してもしっかりと進めることができた点は良かったと考える。しかし、質問されて、こちらのメンバー内で答えられなかった時に沈黙を作ってしまい、その場面で、少しでも話ができれば、なお成功させることができたのではないかと考える。

本プロジェクトで学んだすべてのことは、今後の卒業研究や就職してからの仕事にも必ず必要になることばかりである。特にコミュニケーションをとることは一番大事であると感じた。コミュニケーションをとらなければ、課題をこなすスピードが遅くなり、プロジェクト全体が後れをとってしまうことを学んだ。また、今年度は、ほとんどオンラインで作業をおこなっていたため、実際に対面で会っていない分、円滑に作業を進めることができる場面でも、メンバー内で行き違いがあったりと、多少苦労した部分が多かった。ただ、オンラインであったからこその学びでもあるので、それを今後、有効活用していきたいと思う。

（※文責：三浦玲音）

### 7.0.3 鈴木翔斗

前期のプロジェクトの活動では反応拡散系がどういったものなのかメンバー全員で文献を輪読しながら勉強をした。まず、メンバー間で輪読する箇所を分担し担当した個所の勉強を進め、プロジェクトの時間に全員の前で発表する形式を採用し進めていった。自分が担当した個所でも自分の理解力が足りず、発表の時にメンバーや担当教員に十分に説明することができず、プロジェクトの時間が押してしまうことがあった。この点に関してはわからないところは自分一人で調べて解決しようとするのではなく、メンバーや担当教員にわからないところについて質問をして助言を求める

べきであったと考える。メンバーが発表するときも自分が理解できないところがあったらその個所について他のメンバーに質問して納得できるまで勉強に付き合ってもらうべきだったと考える。理解できていない箇所が少しずつでもあるとその後の数値計算プログラムの作成やプロジェクトの進行に悪影響を及ぼすことがわかった。実際に自分の担当個所を発表したときもメンバーと担当教員にいまいち理解してもらえずわかりやす説明ができていなかった。メンバーが効率的に担当個所以外の部分を理解できるようにするためにも、まず自分がその個所を完全に理解することが必要であるとわかった。そのためにも文章中に出てきた聞きなじみのない単語をインターネットで調べたまま説明するのではなく、誰にでも理解できるような説明も一緒に言うことが必要だった。他の人の目線で発表を考え、それに向けて勉強し、理解できないところがあったら人に相談することが大事ということが発表に関して総じて言えることであると考える。

このプロジェクトは基本的に Python や C 言語などを通じて数値計算プログラムを作成し、グラフを出力することが主な活動の一つであるため数値計算のアルゴリズムの理解や各プログラミング言語におけるグラフや動画の出力が大事だと考える。自分は今まで数値計算のアルゴリズムを作成したことがなく、プロジェクトの進行と時間の都合上、比較的アルゴリズムの理解が簡単な計算手法を採用しプログラムを作成したが、安定性や計算の効率が他のアルゴリズムと比べて落ちてしまった。その結果、パラメータを安定性が取れる範囲でしか設定することしかできなく、パラメータを変更してシミュレーションをするのに多くの時間を費やしてしまった。計算効率に関しても他のアルゴリズムに比べて効率が悪く、計算自体に時間を費やしてしまった。この点に関しては自分が他の数値計算アルゴリズムを理解し、プログラムに組み込むことができれば計算効率を上げることができ、他の反応拡散系にも手を出すことができたと考える。今後の課題としては数種類の数値計算アルゴリズムを勉強し、完全に理解したうえでプログラムを作成し、シミュレーションを行うことである。プログラミング言語を通じたグラフやアニメーションの作成に関しては、自分は今回基本的に Python を通じてプログラムを作成し、グラフやアニメーションを作成したが、自分の Python の理解力が足りずグラフ化やアニメ化に時間がかかってしまった。学校の講義だけでは Python は理解できず自分でもプロジェクトと並行して勉強していたがそれでも勉強が足りずプログラム作成時に手が止まっていたのが原因であるため、もっと Python の勉強時間を取るべきであったと考える。今後の課題として Python をもっと勉強し、ライブラリを上手く使って見やすいグラフやアニメーションを短時間で作成することがあげられる。

後期のプロジェクトの活動では拡散方程式と Fitzhugh-Nagumo 方程式の数値計算プログラムを作成し、グラフとアニメーションを作成したが、その途中でメンバーと一緒に共通のプログラムを作成する機会があった。今まで他の人と共通のプログラムを作成することがなかったのでその時に時間を費やしてしまった。プログラムの開発を円滑に進めるために外部サービスの利用方法をもっと学ぶべきだと思った。そうすることによってプログラムを効率的に作成することができ、プロジェクト全体でも他の課題に取り組めたのでその点に関しては自分の勉強不足だったと考える。今後の課題としては外部サービスについて他の人に何を使っているかなどを聞き、自分の開発にもそれを取り入れていくことがあげられる。

またメンバー間で会議を行ったときにはプログラムの内容や各小課題の割り振りの話をしていたが、オンラインということもあり自分からなかなか声を出すことができずに時間だけが過ぎていくことが時々あったのでリーダーでなくとも自分から会議を進めることをできるようにしたいと考えた。小課題の割り振りも自分がやりたい課題があってもそれをメンバーに伝えられず他の課題に取り掛かることがあったので自分から進んで声を出したいと考えた、今後の課題としてはメンバーで集まったときには自分から声を出し、会議を円滑に進めることがあげられる。

（※文責：鈴木翔斗）

### 7.0.4 藤田淳

プロジェクトを始めるにあたってプロジェクトメンバー全員が反応拡散系について予備知識のない状態でこのプロジェクトは始まった。まず、担当教員が用意してくれた文献をプロジェクトメンバーで分担し、反応拡散系に関しての知識を深めるために輪読を行った。文献に出てくる語句は、どれも初めて聞くものばかりで最初は苦戦しながらもネットで分からない語句を検索しながら担当した内容をスライドにまとめて発表し、各プロジェクトメンバーと知識を共有した。しかし、発表の場面では自分が担当した内容に対しての理解が低く、担当教員の質問に答られないことや、他のプロジェクトメンバーにも理解しやすいような発表ができていなかったと感じたので、事前に担当した内容の理解をより深め、誰が聞いてもわかるような説明を心掛けるべきだったと考える。また、自分の担当した内容に固執してしまい、他のプロジェクトメンバーが担当した内容の発表に関して質問をすることもなく理解した気になっていたが、後で振り返った際に覚えていなかったり、理解できていなかったことがあったので、メンバーの間でも分からないところは質問しあってより理解を深める努力をするべきだったと考える。また、ネットで調べたことを鵜呑みにしすぎている部分があったので、内容を吟味して活用するべきだったと考える。また、似た内容の論文などの文献を読むことがなかったので、他の文献も読み進めながら反応拡散系に関しての知識をより深めるべきだったと感じる。

次に、このプロジェクトは、主に担当した内容に出てくる反応拡散系について数値計算を行ったり、グラフをプロットするプログラムの作成を行った。数値計算については、解き方が一番単純だった差分法ばかり使ってしまい、グラフをプロットする際のプログラム内の計算量が多くなってしまい処理に時間がかかってしまい、効率的とは言えなかったので、より計算量が少ない数値計算の手法を模索するべきだった。プログラムに関しては、ネットで調べたプログラムを参考にしすぎてしまい、コードの理解に時間がかかってしまうことがあったので、自分で考えてコードを書くことが大事だと思った。また、数値計算やプログラムを作成するにあたって、メンバー間での協力が少なかったと感じたので、困ったときにはもっと頼るべきだった。前期は、全体的にメンバー間での協力が足りなく、成果もあまり上げられなかったので、メンバー間での交流を深め、率先的に協力を呼びかけるべきだったと考える。

前期は、まず捕食者ー被食者モデルに関して解析を行った。このモデルは、補色ー被食関係による個体数の変動を表現する数理モデルで、主に捕食者と被食者が両方存在している状態について解析を行った。この状態を安定状態と言い、線形性安定性解析やヤコビ行列を使うことによってどのような安定状態であるか調べられることを学んだ。また、普段の数学では行わない数値計算の手法であるオイラー法を学んだ。数値計算アルゴリズムはグラフをプロットする際にプログラムに取り込んだが、上手くいかないことが多く、何回も改良しながら間違いを減らす努力を行った。今後の課題としてより効率的な数値計算アルゴリズムを模索することで、プログラミングに関しての理解も深まると感じた。後期は、偏微分方程式の形で反応拡散系を解析を行った。偏微分方程式の数値計算を行うにあたって差分法という手法を学んだ。差分法のアルゴリズムをプログラムに取り込むと、処理時間がとてつもなく長くなってしまい作業が進まなかったことから、より処理時間が短くなるような数値計算の手法を調べるべきだったと感じた。

発表の場では、オンラインで行うにあたって成果発表用の動画を撮影した。発表用のスライドに数式ばかり載せてしまい、反応拡散系に理解の無い人が見るには難しくつまらない内容になってし

まっていたので、誰が見てもわかりやすく興味を持ってもらえるような工夫を考えるべきだった。また、動画での発表も声が聞き取りづらかったり、早口なところもあったので、相手が聞きやすい工夫をするべきだったと考える。質疑応答では、鋭い内容の質問に答える際に、時間がかかってしまったり、答えられないということがあった。どんな質問にも答えられるようにより準備をするべきだったにもかかわらず、その努力を怠ってしまっていたことは問題点としてあげられる。

プロジェクトを通して学んだことや問題点は今後の卒業研究にも生かされることだと思うので、問題点は解決し、二度と同じミスをしないよう心掛け、プログラミングや数値計算の手法などの学んだことは、卒業研究に生かせるように努力しながら活動していきたいと考えている。

（※文責：藤田淳）

# 参考文献

[1] 三村昌泰総監修. マレー数理生物学 応用編. 丸善出版, 2016.

[2] 藤本武文. 興奮系におけるパターンの制御. 九州大学大学院総合理工学府 量子プロセス理工学専攻 非線形物性学講座, 2003.