【2020/最終】プロジェクト No.06 複雑系の数理とシミュレーション

川口 聡 / 川越敏司 / 斉藤朝輝
Kawaguchi Satoshi　Kawagoe Toshiji　Saitou Asaki

反応拡散系におけるパターン形成

Pattern formation in reaction diffusion system

プロジェクトメンバー：花山竜也(PL) / 三浦玲音 / 鈴木翔斗 / 藤田淳
purojekt member　Hanayama Tatuya　Miura Reon　Suzuki Syoto　Fujita Atushi

■プロジェクト概要 Overview

プロジェクトテーマ Project Theme

生物の拡散や模様が反応拡散系で形成されることをモデル方程式を用いて解析する。

We analyze the diffusion and patterns of living organisms formed by reaction-diffusion systems using model equations.

目的 Purpose

参考文献を輪読し、実際に数値計算することで、論文読解能力、モデリング能力、プログラミング能力を身に付ける。また、身に付けた能力を応用し、数値計算プログラムを作成して、反応拡散系の解の振る舞いを調べ、どのようなパターン形成が出来ているか確認する。

Acquire the ability to read a treatise, model, and program by reading the references in a circle and performing numerical calculations. Also, by applying the acquired abilities, create a numerical calculation program, investigate the behavior of the solution of the reaction-diffusion system, and confirm what kind of pattern formation is possible.

活動内容 Activity

今年度はグループ分けを行わず活動をしていく。各自が自習の形で毎週の課題をこなし、zoomを通して、発表し、理解を深めていく。前期は、数値計算するための基礎知識を学び、後期は、前期で身に付けた知識を駆使し、前期同様の作業を交えながら、数値計算から進行波解の振る舞いの変化を求める。そしてその進行波解の振る舞いをプログラムで作成して、時間空間変化のアニメーション動画を作成する。

This year, we will continue to work without grouping. Each person will complete weekly tasks in the form of self-study, present through zoom, and deepen their understanding. In the first half, learn the basic knowledge for numerical calculation, and in the second half, make full use of the knowledge acquired in the first half, and while doing the same work as in the first half, find the change in the behavior of the traveling wave solution from the numerical calculation. Then, a program is created for the behavior of the traveling wave, and a video of the time-spatial change is created.

成果 Outcome

反応拡散方程式をFourier変換で解析解を出し、単純オイラー法を用いて確認した。その結果、拡散方程式は時間経過とともにピークは小さくなるが空間分布に関しては広がり、$\int u(x,t)dx=1$を維持していることがわかった。次に$x=0$, Lにおける境界条件をNeumann境界条件とした、$\varepsilon\tau\ \partial u/\partial t=(\partial^2 u)/(\partial x^2)+f(u,a)$,$f(u,a)=u(1-u)(u-a)$での定数aの変化によるフロント解の動きを確認した。$a=0.5$の時は$u=0$と$u=1$の安定性が等しく、$0<a<0.5$の時は$u=1$の方がより安定していて、フロント解は右に動く。また、$0.5<a<1$の時は$u=0$の方がより安定していて、フロント解は左へ動くことが確認できた(図1)。これらのことより$u=0,u=1$が安定、$u=a$で不安定な双安定系であることがわかる。また、$\varepsilon\tau\ \partial u/\partial t=\varepsilon^2\ (\partial^2 u)/(\partial x^2)+f(u,v)$,$\partial v/\partial t=(\partial^2 u)/(\partial x^2)+g(u,v)$では均衡が崩れた時、進行パルス解が生じることが確認をした。その後FitzHugh-Nagumo方程式を計算することで進行パルス解は境界におけるvの値が小さいほうに動くことがわかる(図2)。

The reaction-diffusion equation was analyzed by Fourier transform and confirmed by the simple Euler method. As a result, it was found that the diffusion equation has a smaller peak with the passage of time, but has a wider spatial distribution and maintains ∫u (x, t) dx = 1. Next, ε τ ∂u / ∂t = (∂ ^ 2 u) / (∂x ^ 2) + f (u, a), f (u, a), where the boundary condition at x = 0, L is the Neumann boundary condition. We confirmed the movement of the front solution due to the change of the constant a at) = u (1-u) (ua). When a = 0.5, the stability of u = 0 and u = 1 is equal, when 0 <a <0.5, u = 1 is more stable, and the front solution moves to the right. It was also confirmed that when 0.5 <a <1, u = 0 was more stable and the front solution moved to the left (Fig. 1). From these facts, it can be seen that u = 0 and u = 1 are stable, and u = a is an unstable bistable system. Also, ε τ ∂u / ∂t = ε ^ 2 (∂ ^ 2 u) / (∂x ^ 2) + f (u, v), ∂v / ∂t = (∂ ^ 2 u) / (∂x ^ 2) It was confirmed that a traveling pulse solution occurs when the equilibrium is lost at + g (u, v). After that, by calculating the FitzHugh-Nagumo equation, it can be seen that the traveling pulse solution moves toward the smaller value of v at the boundary (Fig. 2).

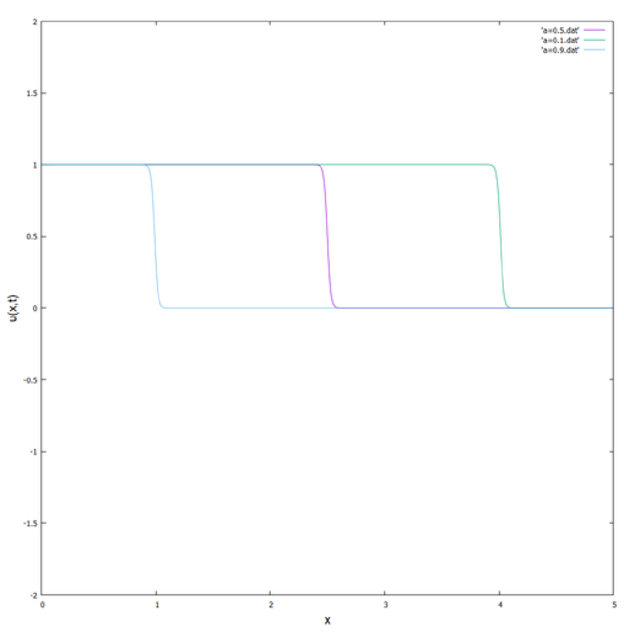

図1:フロント進行波解

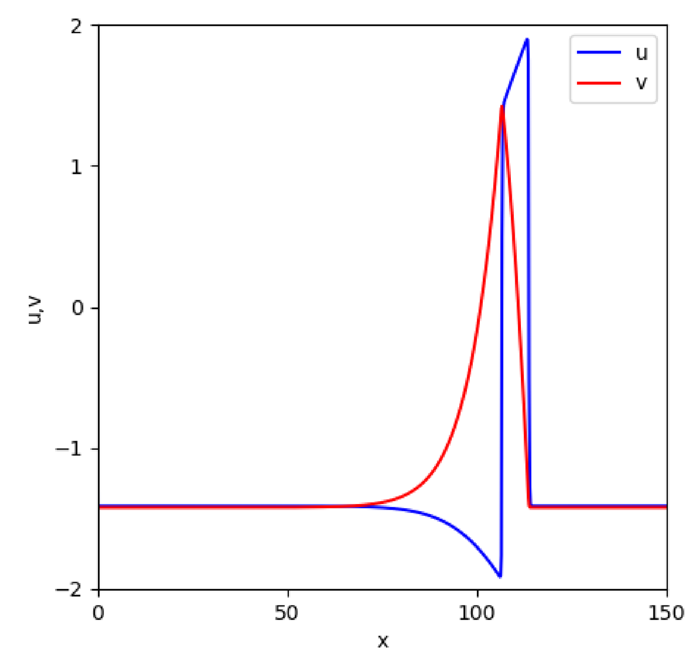

図2:進行パルス解

今後の予定 Future Plan

1次元2成分の反応拡散系の偏微分方程式の解を数値計算により求め、その時の進行波解がどのような形の波で振る舞うのかがわかった。また、そのときの解の振る舞いの変化を1次元の進行パルス解としてアニメーション動画を作成することができた。今後は、2次元空間で、初期条件を変えることで、螺旋状とリング状のパターンを形成して、アニメーション動画を作成する。

The solution of the partial differential equation of the reaction-diffusion system of one-dimensional and two components was obtained by numerical calculation, and it was found what kind of wave the traveling wave solution at that time behaves. In addition, it was possible to create an animation movie by using the change in the behavior of the solution at that time as a one-dimensional traveling pulse solution. In the future, we will create animated videos by forming spiral and ring-shaped patterns by changing the initial conditions in a two-dimensional space.

スケジュール Schedule

- 5月：・プロジェクト始動
- 6月：・参考文献の輪読
- 7月：・中間発表会
- 8月：・前期の振り返り ・中間報告書作成準備
- 9月：・中間報告書作成
- 10月：・数値計算プログラム作成
- 11月：・アニメーション動画作成
- 12月：・最終成果発表会
- 1月：・最終報告書作成