

応用数学II 第1回演習・課題 ベクトル方程式

[1. 垂線のベクトル方程式] (20点)

$\triangle ABC$ の頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする．以下の各問いに答えよ．ただし，垂線上の任意の点 P の位置ベクトルを \vec{r} とすること．

問 1.1 A から BC に下ろした垂線のベクトル方程式を求めよ．

問 1.2 辺 BC の垂直 2 等分線のベクトル方程式を求めよ．

(ヒント: ベクトルの内積で表現することを考える)．

[2. 直線のベクトル方程式] (30点)

a, b, c を定数 (ただし $a^2 + b^2 \neq 0$) とするとき, xy 平面において $ax + by = c$ であらわされる直線 ℓ について以下の各問いに答えよ．

問 2.1 直線 ℓ の単位法線ベクトルと原点からの距離を求めよ．

問 2.2 $ax + by < c$ が表す領域を図示せよ．

[3. ヘッセの標準形] (30点)

問 3.1 xy 平面上の直線の方程式 $x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$ (ただし $\rho \geq 0$) は, 原点からの距離が ρ で, 原点から直線への垂線の足と x 軸のなす角度が θ であることを示せ．(これをヘッセの標準形という)

問 3.2 座標平面に直線 ℓ がある．直線 ℓ 上の動点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は, t をパラメータとして,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ と表される．}$$

直線 ℓ のヘッセの標準形を求めよ．また, 直線 ℓ の単位法線ベクトルと原点からの距離を求めよ．

問 3.3 直線 ℓ で座標平面を 2 分割したとき, 原点が含まれる側の領域を示す不等式を求めよ．ただし直線 ℓ は領域に含まないものとする．

[4. 円の接線] (20点)

xy 平面に円 $C: x^2 + y^2 = 3$ があり, 直線 ℓ は円 C に第一象限で接している．原点から直線 ℓ への垂線の足が x 軸の正の部分となす角度は $\pi/3$ である．以下の各問いに答えよ．(三角関数に関しては値を求めておくこと)

問 4.1 円 C の半径を求めよ．

問 4.2 直線 ℓ の単位法線ベクトルを求めよ．

問 4.3 直線 ℓ の方程式を求めよ．

問 4.4 直線 ℓ で xy 平面を 2 分割したとき, 円 C が含まれない方の領域を不等式により表せ．ただし, 直線 ℓ は領域に含まれないものとする．