ACS 3rd week 2023f

◎ エージェント間の相互作用の数理モデル(=ゲーム理論)

ゲームの分類
- { ゼロ和 … 全プレイヤの利得の和がゼロ
  - 非ゼロ和 … それ以外
- { 2人ゲーム
  - N人ゲーム
- { 非協調 … プレイヤ間に通信が無い
  - 協調

◎ ゼロ和 ゲームの定義

列プレイヤ

プレイヤBの戦略

A \ B	n_1	n_2
m_1	4	−1
m_2	−3	0
m_3	0	1

行プレイヤ

プレイヤAの戦略

プレイヤAの利得

← 利得行列 (payoff matrix)

3\2

◎ 一般の利得行列の定義

プレイヤA,Bの戦略の有限集合をそれぞれM,Nとする

$M=\{m_1, m_2, \ldots, m_a\}$ a個の戦略

$N=\{n_1, n_2, \ldots, n_b\}$ b個 〃

利得関数 $p_i(m,n)$: 結合動作 (m,n) をプレイヤ i の利得に写像する関数

プレイヤのインデックス(A or B)

N.Q

$$p_i : M \times N \rightarrow \mathbb{R} \text{ (実数の集合)}$$

ゼロ和ゲームでは

$$p_A(m, n) = -p_B(m, n)$$

が成り立つ.

※ 略記法：以下では $p_A(m, n)$ を p_{mn} と書く.
プレイヤAの利得

◎ ゲーム理論とは何を考える学問なのか?

(答え)：各プレイヤは自己の利得を最大化するために どの戦略をとるべきかを考える学問

→合理性 (rational)

(例)

A \ B	n_1	n_2	n_3
m_1	4	−1	−2
m_2	−3	0	3
m_3	0	1	2

$$\max_m \left(\min_n p_{mn}\right) = 0$$

$$\min_n \max_m p_{mn} = 1$$

プレイヤAはどの戦略を選ぶべきか?

① プレイヤAの選択する戦略は?

$$\arg_m \left(\max_m \left(\min_n p_{mn}\right)\right) = m_3$$

② プレイヤBの選択する戦略は?

$$\arg_n \left(\min_n \left(\max_m p_{mn}\right)\right) = n_2$$

→この考えは minimax アルゴリズムに基づいている.
各プレイヤの最適戦略を与えてくれる.
性質：最悪ケースでの被害を最小化.

定理　一般に $\max_m \min_n P_{mn}$ と $\min_n \max_m P_{mn}$ は一致しない。

(例)

A \ B	n_1	n_2	n_3
m_1	4	−1	−2
m_2	−3	0	3
m_3	3	1	2

$\max_m \min_n P_{mn} = 1$

$\min_n \max_m P_{mn} = 1$

この場合は $\max_m \min_n P_{mn} = \min_n \max_m P_{mn}$

となっている。この場合の結合動作を (m^*, n^*) で表わし、それを均衡点という
(equilibrium point)

定理　重要！
ゼロ和ゲームでは一般に

$$\max_m \min_n P_{mn} \leq \min_n \max_m P_{mn}$$

が成り立つ。これは
「プレイヤAが確実に獲得できる利得
$\leq$ プレイヤBが防ぎ切れない損失」

定理　均衡点は常に存在するとは限らない。

定理 均衡点が存在する場合は鞍(くら)点(saddle point)が存在する。 (解析学の概念)

$$\forall m \forall n \quad P_{mn^*} \leq P_{m^*n^*} \leq P_{m^*n}$$

(m^*, n^*) が鞍点。

つまり、鞍点(均衡点。最適戦略の結合動作)から各プレイヤが単独で戦略を変更しても、利得を向上させることはできない。