DCS 4th week 2023f

☆ 混合拡大. 混合戦略 (mixed strategy)

⇒ アイデア: 戦略選択に確率を導入する.

(例)

A＼B	n_1	n_2	n_3
m_1	0	1	−1
m_2	−1	0	1
m_3	1	−1	0

$\max_m \min_n P_{mn} = -1$

$\min_n \max_m P_{mn} = 1$

(ジャンケン)

ジャンケンで手をランダムに選ぶ.

⇒ 戦略決定に確率を導入

◎ ゲームの拡大 ⇐ 確率を導入

混合拡大 (確率を導入)

↑

純戦略 (確率を用いない)

(pure strategy)

② 混合拡大の定義

プレイヤAの純戦略 $M=\{m_1, m_2, \cdots, m_a\}$

〃 B 〃 $N=\{n_1, n_2, \cdots n_b\}$

プレイヤAの混合戦略は以下の確率ベクトルで表現される

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_a\}$$

p_i : 戦略 m_i をとる確率

$$\forall i \quad 0 \le p_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{a} p_i = 1$$

(注意) 純戦略 m_i は $\mathbb{P}=\{0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0\}$

$1 \sim i-1$, i番目, $i+1 \cdots a\}$

プレイヤBの混合戦略を $\mathbb{Q}=\{q_1, q_2, \cdots, q_b\}$ で表現する

$$\forall i \quad 0 \le q_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{b} q_i = 1.$$

さらに利得行列を $G\ (a \times b)$ とする

$$G = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1b} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{a1} & P_{a2} & \cdots & P_{ab} \end{pmatrix}$$

混合拡大のプレイヤAの利得 $P_A(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ は期待値となる

$$P_A(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = p_1 q_1 P_{11} + p_1 q_2 P_{12} + \cdots + p_i q_j P_{ij} + \cdots + p_a q_b P_{ab}$$

$$= \mathbb{P} G\, {}^t\mathbb{Q}$$ ← 期待値（期待利得）

$$\underbrace{P_A(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = -P_B(\mathbb{P},\mathbb{Q})}_{\text{ゼロ和}}$$

定理　ゼロ和ゲームを混合拡大するとミニマックス原理は常に均衡点を与えることが可能。
そのような混合拡大が存在する.

プレイヤAの混合戦略の全集合 $\sigma_A = \{\mathbb{P} \mid \mathbb{P}_1, \cdots\}$

〃　B　〃　$\sigma_B = \{\mathbb{Q} \mid \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \cdots\}$

とすると

$$\max_{\mathbb{P} \in \sigma_A} \min_{\mathbb{Q} \in \sigma_B} \mathbb{P} G^t \mathbb{Q} = \min_{\mathbb{Q} \in \sigma_B} \max_{\mathbb{P} \in \sigma_A} \mathbb{P} G^t \mathbb{Q}$$

となる。これを実現する均衡点を $(\mathbb{P}^*, \mathbb{Q}^*)$ とすると

$$\forall \mathbb{P}\, \forall \mathbb{Q} \quad \mathbb{P} G^t \mathbb{Q}^* \leq \mathbb{P}^* G^t \mathbb{Q}^* \leq \mathbb{P}^* G^t \mathbb{Q}$$

が成り立つ

		Q_1	Q_2	Q_3
A\B		n_1	n_2	n_3
P_1	m_1	0	1	−1
P_2	m_2	−1	0	1
P_3	m_3	1	−1	0

$0 \leq P_i \leq 1,\ \sum P_i = 1$

$0 \leq Q_i \leq 1\quad \sum Q_i = 1$

$E_A\ (= P_A(\mathbb{P}, \mathbb{Q}))$ をプレイヤAの期待利得とする。

m_1のとき：$Q_1 \times 0 + Q_2 \times 1 + Q_3 \times (-1)$

m_2 〃 ：$Q_1 \times (-1) + Q_2 \times 0 + Q_3 \times 1$

m_3 〃 ：$Q_1 \times 1 + Q_2 \times (-1) + Q_3 \times 0$

よって $E_A = P_1(Q_2 - Q_3) + P_2(Q_3 - Q_1) + P_3(Q_1 - Q_2)$

(ケース1) $P_1 = 1/2,\ P_2 = 1/3,\ P_3 = 1/6$ のとき

$$E(A) = -\frac{1}{6}Q_1 + \frac{1}{3}Q_2 - \frac{1}{6}Q_3$$

(ケース2) $P_1 = 1/3,\ P_2 = 1/3,\ P_3 = 1/3$ のとき

$$E(A) = 0$$

プレイヤAは max min 値を0にできる。

↳ プレイヤBの戦略に依存しない。

$\mathbb{P} = (1/3, 1/3, 1/3)$ はプレイヤAの期待利得を最大化する。