微分方程式とカオス Difference Equation and Chaos

Visualizing NonLinear Phenomenon

扱った微分方程式

• リミットサイクル

安定リミットサイクル

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon(a^2 - x^2 - y^2)x$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \varepsilon(a^2 - x^2 - y^2)y$$

• 単振動子

($\varepsilon = 0$)

$$\frac{dx}{dt} = -y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

• 2次元非自励系カオス

Duffing方程式

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 - ky + B\cos(\nu t)$$

DuffingとVanderpolの混合微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - x\ \ )y - x\ \ + X\cos(\nu t)$$

• 3次元自励系カオス

レスラーアトラクタ

$$\frac{dx}{dt} = -(x + z)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

ダブルスクロール(チュア)の回路

$$C1\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{R1}(v_{C1} + v_{C2}) - g(v_{C1})$$

$$C2\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{R1}(v_{C1} - v_{C2}) + iL$$

$$L\frac{diL}{dt} = -v_{C2}$$

リミットサイクルとカオス

リミットサイクル

リミットサイクルとは、相空間上の閉軌道で、時間 t を無限大にしたとき、またはマイナス無限大にしたときに収束するものが少なくとも一つの軌道がある閉軌道をあらわしている。リミットサイクルは非線形系でのみ現れ,リミットサイクルの十分近くの軌道がすべてリミットサイクルに収束するとき、安定であるという。

安定なリミットサイクルは、自励振動を表していて閉軌道に小さな摂動が加わっても元に戻る。リミットサイクルを持つ例として、Van der pol振動子がある。

また、定義として閉軌道で十分近くに閉軌道を持たない場合をリミットサイクルとする場合もある。

製作した回路では位相が約$\pi/2$ずれたほぼ同振幅の安定した発振信号をそれぞれx方向とy方向へ入力して合成したところきれいな単位円を描けた。

カオス

カオスの定義としてはおよそ周期性を持たない(無限個の周期解を持つ)ことやリアプノフ指数が1より大きく何らかのポアンカレ写像によりストレンジアトラクタが確認できることなどが挙げられる。また、カオスには自己相似性や単純な数式からランダムに見える複雑な振る舞いが発生し初期値のごくわずかなずれが、将来の結果に甚大な差を生み出すなど過去の観測データから将来の長期予測が困難となるなどの特徴をもっている。

一部のシステムが複雑な振る舞いをするのは、その振る舞いを表す2次元非自励系微分方程式や3次元自励系微分方程式などの非線形性が原因であるといえる。

回路製作過程では各種パラメータを表す係数の調整次第で振る舞いも様々で、オシロスコープのトリガー機能を使って観測したところ無数の周期解の存在が確認された。